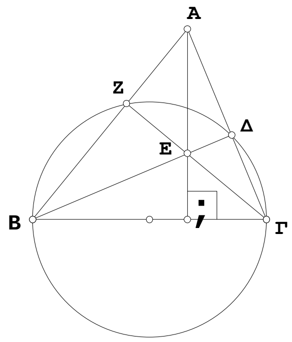
ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΕΣ ΓΩΝΙΕΣ-ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑ - ΕΓΓΡΑΨΙΜΑ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ

1. Με διάμετρο την πλευρά **ΒΓ** τριγώνου **ΑΒΓ** γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει τις πλευρές **ΑΒ** και **ΑΓ** στα σημεία **Ζ** και **Δ** αντίστοιχα. Αν **Ε** είναι το σημείο τομής των **ΒΔ** και **ΓΖ** να αποδείξετε ότι:

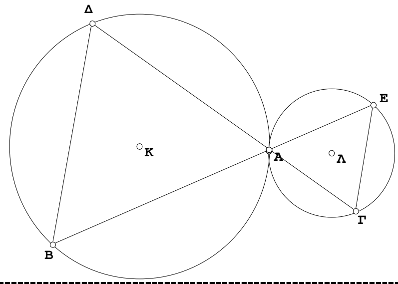
$$\boxed{AE \perp B\Gamma}$$



---

2. Δύο κύκλοι **Κ** και **Λ** εφάπτονται στο **Α**. Δύο ευθείες που περνούν από το **Α** τέμνουν τον κύκλο **Κ** στα **Β** και **Δ** και τον κύκλο **Λ** στα **Ε** και **Γ** αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

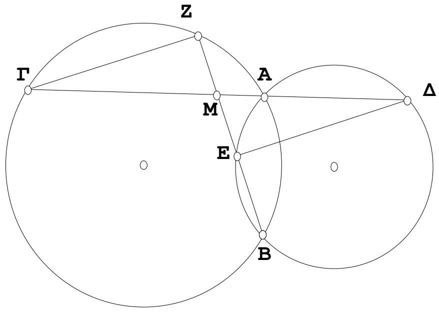
$$\boxed{B\Delta // \Gamma E}$$



---

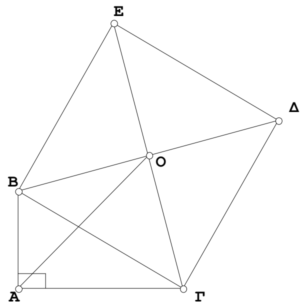
3. Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία **Α** και **Β**. Μια ευθεία διέρχεται από το **Α** και τέμνει τους κύκλους στα σημεία **Γ** και **Δ**. Έστω **Μ** το μέσο του **ΓΔ**. Η ευθεία **ΒΜ** τέμνει τους κύκλους στα σημεία **Ε** και **Ζ**. Να αποδείξετε ότι:

i) $\boxed{\Gamma \hat{M} Z = E \hat{M} \Delta}$ ii) $\boxed{ME = MZ}$



---

4. Εξωτερικά ενός ορθογωνίου τριγώνου **ΑΒΓ (Α=90°)** θεωρούμε τετράγωνο **ΒΓΔΕ.** Αν **Ο** είναι το κέντρο του τετραγώνου αυτού, να αποδειχθεί ότι η **ΑΟ** διχοτομεί τη γωνία **Α.**

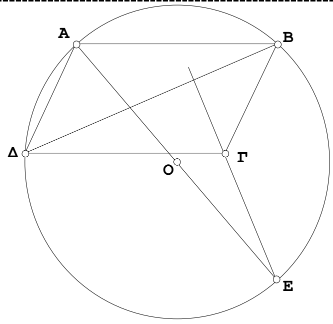


---

5. Οι κορυφές **Α, Β** και **Δ** παραλληλογράμμου **ΑΒΓΔ** είναι σημεία του κύκλου με κέντρο **Ο.** Αν **Ε** είναι το αντιδιαμετρικό σημείο του **Α** να αποδείξετε ότι:

i) $\boxed{B\Gamma \perp \Delta E}$ και $\boxed{\Delta\Gamma \perp BE}$.

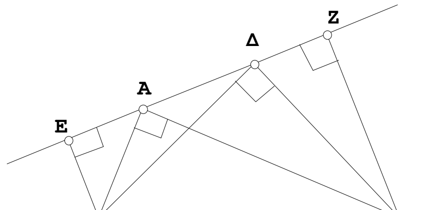
ii) $\boxed{E\Gamma \perp B\Delta}$



---

6. Δύο ορθογώνια τρίγωνα **ΑΒΓ** και **ΒΓΔ** έχουν κοινή υποτείνουσα **ΒΓ** και οι κορυφές **Α** και **Δ** βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της. Αν **Ε** και **Ζ** οι προβολές των **Β** και **Γ** στην ευθεία **ΑΔ** να δείξετε ότι:

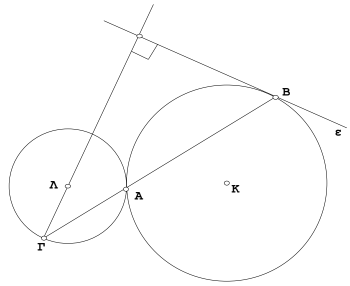
$$\boxed{AE = \Delta Z}$$



---

7. Δίνονται οι κύκλοι **(K,R)** και **(Λ,ρ)** που εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο **A**. Ευθεία που διέρχεται από το **A** τέμνει τους κύκλους στα σημεία **B** και **Γ** αντίστοιχα. Αν **ε** είναι η εφαπτομένη του κύκλου **(K,R)** στο **B**, να αποδείξετε ότι:

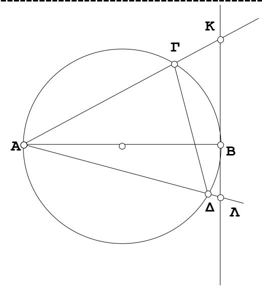
$$\boxed{\Gamma\Lambda \perp \varepsilon}$$



---

8. Δίνεται κύκλος **(O,R)** και διάμετρος **AB**. Εκατέρωθεν της **AB** φέρουμε τυχαίες χορδές **AΓ** και **AΔ**, οι οποίες τέμνουν την εφαπτομένη του κύκλου στο **B** στα σημεία **K** και **Λ** αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

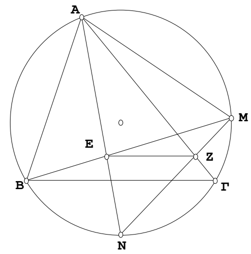
$$\boxed{\text{ΚΛΔΓ εγγράψιμο}}$$



---

9. Δίνεται τρίγωνο **ABΓ**, ο περιγεγραμμένος κύκλος **(O,R)** και τυχαίο σημείο **M** του τόξου **AΓ**. Αν **N** είναι το μέσο του τόξου **BΓ**, οι **MB** και **AN** τέμνονται στο **E** και οι **AΓ** και **MN** τέμνονται στο **Z**, να αποδείξετε ότι:

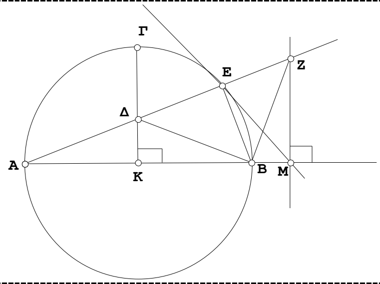
i) $\boxed{\text{ΑΜΖΕ εγγράψιμο}}$ **ii)** $\boxed{EZ // B\Gamma}$



---

10. Δίνεται κύκλος **(K,R)**, διάμετρος **AB** και η ακτίνα **KΓ** κάθετη στην **AB**. Τυχαία ευθεία που διέρχεται από το **A** τέμνει την **KΓ** στο **Δ** και τον κύκλο στο **E**. Αν η εφαπτομένη του κύκλου στο **E** τέμνει την προέκταση της **AB** στο σημείο **M** και η κάθετη επί της **AB** στο **M** τέμνει την **AE** στο σημείο **Z**, να αποδείξετε ότι:

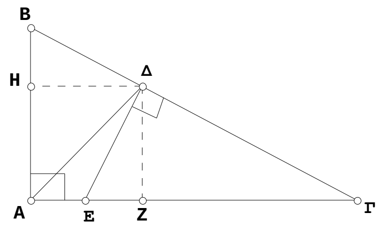
i) $\boxed{\text{ΔΚΒΕ και ΕΒΜΖ εγγράψιμα}}$ **ii)** $\boxed{\widehat{\Delta BZ} = 90^0}$



---

11. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο **ABΓ (A=90°)**. Φέρνουμε τη διχοτόμο της γωνίας **A**, η οποία τέμνει τη **BΓ** στο **Δ**. Στο σημείο **Δ** φέρνουμε την κάθετη στην **BΓ** η οποία τέμνει την **AΓ** στο **E**. Αν **ΔZ** και **ΔH** είναι οι αποστάσεις του **Δ** από τις **AΓ** και **AB** αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

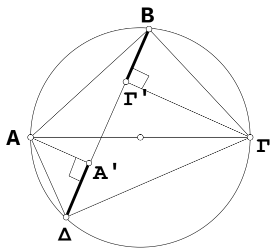
i) $\boxed{\Delta Z = \Delta H}$ **ii)** $\boxed{\text{ΑΒΔΕ εγγράψιμο}}$ **iii)** $\boxed{\Delta B = \Delta E}$



---

12. Δίνεται εγγεγραμμένο τετράπλευρο **ABΓΔ** του οποίου η διαγώνιος **AΓ** είναι διάμετρος. Αν **ΔA΄**, **BΓ΄** είναι οι προβολές των **AΔ** και **BΓ** αντίστοιχα στην διαγώνιο **BΔ** να αποδείξετε ότι:

$$\boxed{\Delta A' = B\Gamma'}$$



---

13. Δίνεται κύκλος **(K,R)**, **ΓΔ** μια τυχαία χορδή του και **E** το μέσο του κυρτογωνίου τόξου ΓΔ. Αν **EH**, **EΘ** τυχαίες χορδές που τέμνουν τη **ΓΔ** στα **I** και **K** αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

$$\boxed{\text{ΙΚΘΗ εγγράψιμο}}$$