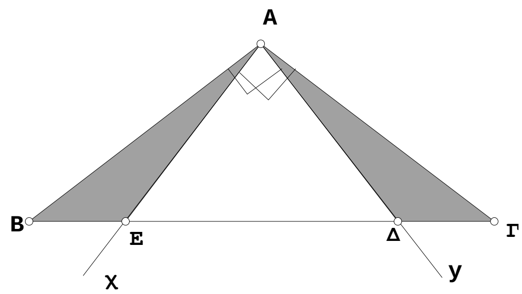
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο **ΑΒΓ** με **ΑΒ=ΑΓ** και $\widehat{A} > 90^0$. Από την κορυφή **Α** φέρνουμε τις ημιευθείες **Αx** κάθετη στην πλευρά **ΑΒ** και **Βy** κάθετη στην πλευρά **ΑΓ** που τέμνουν την **ΒΓ** στα σημεία **Δ** και **Ε** αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο **ΕΑΔ** είναι ισοσκελές.

β) Τα τρίγωνα **ΑΒΕ** και **ΑΔΓ** είναι ίσα.

γ) $B\widehat{A}E = \dfrac{\widehat{A} - 2\widehat{B}}{2}$

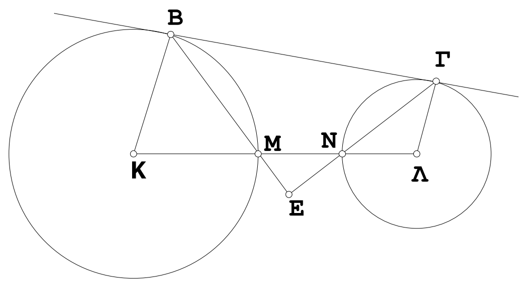


---

2. Δίνονται οι κύκλοι **(Κ, R)** και **(Λ, ρ)** που δεν έχουν κοινά σημεία. Η διάκεντρος **ΚΛ** τέμνει τους κύκλους στα σημεία **Μ** και **Ν** αντίστοιχα. Αν **ΒΓ** είναι κοινό εφαπτόμενο τμήμα των δύο κύκλων, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο **ΚΒΓΛ** είναι τραπέζιο.

β) $BM \perp \Gamma N$



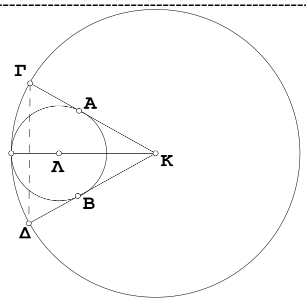
---

3. Δύο κύκλοι **(Κ,R)** και **(Λ,R/3)** εφάπτονται εσωτερικά. Από το **Κ** φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα **ΚΑ** και **ΚΒ** του κύκλου **(Λ,R/3)**.

α) Να υπολογίσετε σε μοίρες τη γωνία $\Gamma\widehat{K}\Delta$.

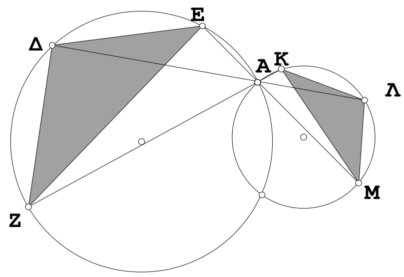
β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο **ΓΚΔ** είναι ισόπλευρο.

γ) Να αποδείξετε ότι **ΑΓ=ΒΔ**.



---

4. Από το σημείο τομής **Α** δύο κύκλων φέρνουμε τρεις ευθείες που τέμνουν τον ένα κύκλο στα σημεία **Δ, Ε** και **Ζ** και τον άλλο κύκλο στα σημεία **Κ, Λ** και **Μ**. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα **ΔΕΖ** και **ΚΛΜ** είναι ισογώνια.



---

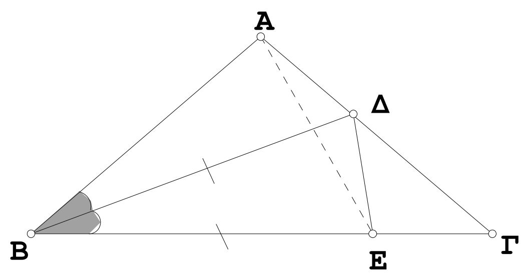
5. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο **ΑΒΓ** με $\widehat{B} = \widehat{\Gamma} = 40^0$ και **ΒΔ** η διχοτόμος του. Στην πλευρά **ΒΓ** παίρνουμε σημείο **Ε** τέτοιο ώστε να είναι **ΒΔ = ΒΕ**. Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο **ΔΕΓ** είναι ισοσκελές.

β) Το τετράπλευρο **ΑΔΕΒ** είναι εγγράψιμο.

γ) Το τρίγωνο **ΑΔΕ** είναι ισοσκελές.

δ) **ΑΔ+ΒΔ =ΒΓ**

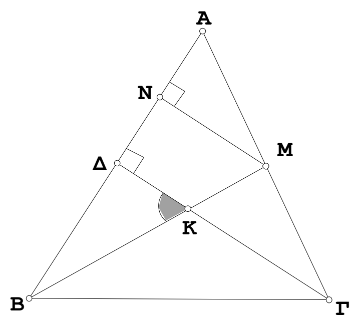


---

6. Δίνεται τρίγωνο **ΑΒΓ**. Αν η διάμεσός του **ΒΜ** και το ύψος του **ΓΔ** είναι ίσα και **Ν** η προβολή του σημείου **Μ** στην πλευρά **ΑΒ**, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι **ΜΝ=//**$\dfrac{\Gamma\Delta}{2}$

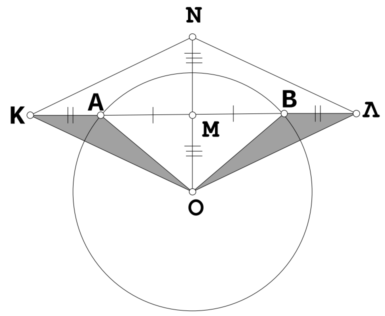
β) Να υπολογίσετε σε μοίρες το μέτρο της οξείας γωνίας που σχηματίζουν η διάμεσος **ΒΜ** και το ύψος **ΓΔ** του τριγώνου **ΑΒΓ**.



---

7. Δίνεται κύκλος κέντρου **Ο** και μία χορδή **ΑΒ** αυτού. Προεκτείνουμε την **ΑΒ** και προς τα δύο της άκρα και στις προεκτάσεις παίρνουμε σημείο **Κ** προς το μέρος του **Α** και σημείο **Λ** προς το μέρος του **Β** έτσι ώστε να ισχύει **ΑΚ=ΒΛ.** Φέρουμε τη διάμεσο **ΟΜ** του τριγώνου **ΟΑΒ** και την προεκτείνουμε κατά **ΜΝ=ΟΜ.** Να δείξετε ότι:

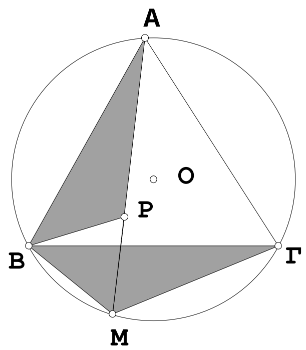
i. Τα τρίγωνα **ΚΑΟ** και **ΛΒΟ** είναι ίσα.
ii. Η **ΝΟ** είναι η μεσοκάθετος του **ΚΛ.**
iii. Το τετράπλευρο **ΚΟΛΝ** είναι ρόμβος.



8. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο **ΑΒΓ** είναι ισόπλευρο και εγγεγραμμένο στον κύκλο (O,R) και είναι **ΑΡ=ΜΓ.** Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα **ΑΒΡ** και **ΒΜΓ** είναι ίσα.
ii. Το τρίγωνο **ΒΜΡ** είναι ισόπλευρο.

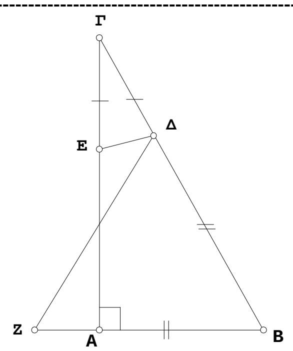
ii. $\boxed{MA = MB + M\Gamma}$



9. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο $(\widehat{A} = 90^0)$,
$\Gamma E = \Gamma\Delta$ και $B\Delta = BZ$. Να αποδείξετε ότι:

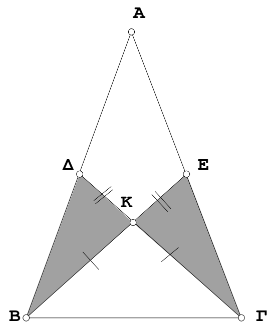
α) $\Gamma\widehat{\Delta}E = 90^0 - \dfrac{\widehat{\Gamma}}{2}$

β) $E\widehat{\Delta}Z = 45^0$



10. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, ένα σημείο Δ στην πλευρά του AB και ένα σημείο E στην πλευρά του $A\Gamma$. Τα τμήματα BE και $\Gamma\Delta$ τέμνονται στο K. Αν $BK = K\Gamma$ και $K\Delta = KE$ να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $BK\Delta$ και $KE\Gamma$ είναι ίσα.
β) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.
γ) $AK \perp B\Gamma$

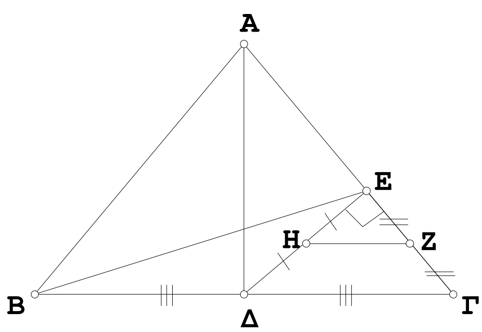


11. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο **ΑΒΓ** με **ΑΒ=ΑΓ** και το μέσο **Δ** της πλευράς **ΒΓ**. Φέρουμε **ΔΕ**$\perp$**ΑΓ** και έστω **Η, Ζ** τα μέσα των **ΔΕ** και **ΕΓ** αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α. **ΗΖ//ΒΓ** και **ΗΖ**$\perp$**ΑΔ.**

β. **ΑΗ**$\perp$**ΔΖ.**

γ. **ΑΗ**$\perp$**ΒΕ.**

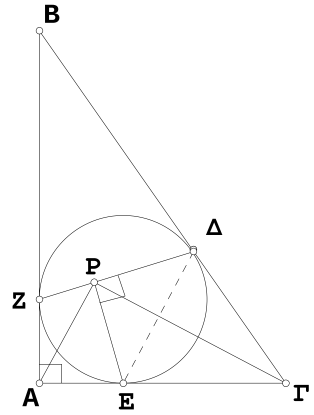


12. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο **ΑΒΓ** ($\hat{A}=90°$) και ο εγγεγραμμένος κύκλος του. Αν **Δ, Ε, Ζ** είναι τα σημεία επαφής του κύκλου με τις πλευρές **ΒΓ, ΑΓ** και **ΑΒ** αντίστοιχα και **ΕΡ** η κάθετη στην **ΖΔ**, να αποδείξετε ότι:

α) $A\hat{P}E = 45^0$

β) Η ευθεία **ΡΓ** είναι μεσοκάθετος της **ΔΕ**

γ) $A\hat{P}\Gamma = 90^0$

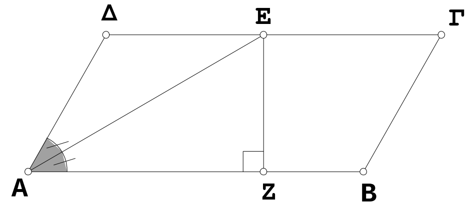


13. Σε ένα παρ/μο **ΑΒΓΔ** είναι $\hat{A}=60^0$ και η διχοτόμος της γωνίας **Α** τέμνει την **ΓΔ** στο σημείο **Ε**.

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο **ΑΔΕ** είναι ισοσκελές.

β) αν **ΕΖ**$\perp$**ΑΒ** να δείξετε ότι **ΑΕ=2ΕΖ.**

γ) αν **ΔΕ=μ·ΒΓ,** όπου $\mu \in \mathbb{R}$, να βρείτε την τιμή του **μ**.

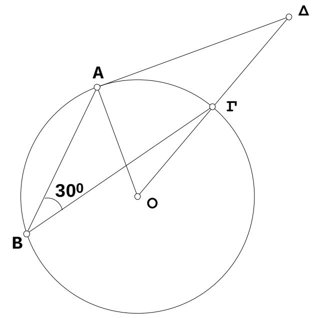


14. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (O,R) και η εγγεγραμμένη γωνία $A\hat{B}\Gamma = 30^0$. Η εφαπτομένη του κύκλου αυτού στο A τέμνει την ευθεία $O\Gamma$ στο Δ.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $OA\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

β) Να δείξετε ότι: $O\Gamma = \Gamma\Delta$

γ) Αν E είναι το αντιδιαμετρικό σημείο του Γ να δείξετε ότι το τρίγωνο ΔAE είναι ισοσκελές.

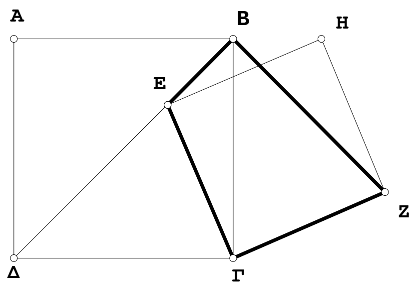


15. Δίνεται τετράγωνο **ΑΒΓΔ** και ένα εσωτερικό σημείο **Ε** της διαγωνίου του **ΒΔ**. Κατασκευάζουμε το τετράγωνο **ΕΓΖΗ**, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να δείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο **ΕΒΖΓ** είναι εγγράψιμο.

β) **ΖΒ**$\perp$**ΒΔ.**

γ) το τετράπλευρο **ΑΒΖΓ** είναι τραπέζιο.

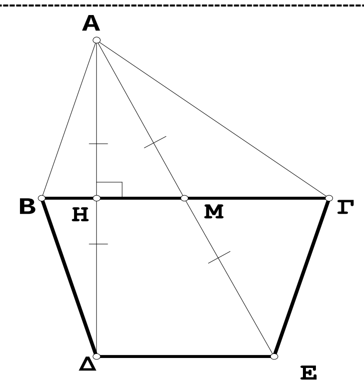


16. Σε τρίγωνο **ΑΒΓ** φέρουμε το ύψος **ΑΗ** και τη διάμεσο **ΑΜ.** Στις ημιευθείες **ΑΗ,ΑΜ** παίρνομε τα σημεία **Δ,Ε** αντίστοιχα έτσι ώστε **ΗΔ=ΗΑ** και **ΜΕ=ΜΑ.** Δείξτε ότι:

α) **ΑΒ=ΒΔ**

β) **ΑΒ=ΓΕ**

γ) το **ΒΓΕΔ** είναι ισοσκελές τραπέζιο.



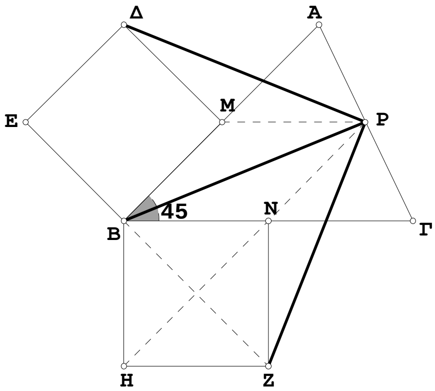
17. Δίνεται τρίγωνο **ΑΒΓ** με $\widehat{B}=45^0$ και τα μέσα **Μ,Ν,Ρ** των πλευρών του **ΑΒ,ΒΓ** και **ΓΑ** αντίστοιχα. Έξω από αυτό κατασκευάζουμε τα τετράγωνα **ΒΜΔΕ** και **ΒΝΖΗ.** Να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία **Ε,Β,Ζ** είναι συνευθειακά.

β) **ΡΔ=ΡΖ**

γ) Τα σημεία **Ρ,Ν,Η** είναι συνευθειακά.

δ) **ΡΒ=ΡΖ**

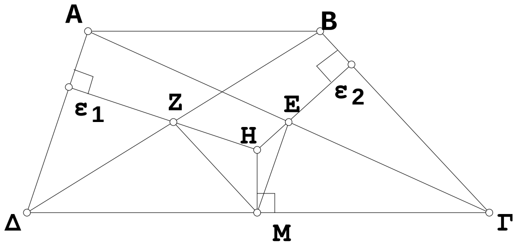


18. Δίνεται τραπέζιο **ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΔΓ)** με **ΑΒ<ΔΓ** και τα μέσα **Ε** και **Ζ** των διαγωνίων του **ΑΓ** και **ΒΔ,** αντίστοιχα. Από το **Ζ** φέρνουμε την ε_1 κάθετη στην **ΑΔ** και από το **Ε** την ε_2 κάθετη στην **ΒΓ.** Αν **Μ** είναι το μέσο της **ΒΓ** να δείξετε ότι:

α) Οι ε_1 και ε_2 τέμνονται σε ένα σημείο **Η.**

β) $\varepsilon_1 \perp EM$ και $\varepsilon_2 \perp ZM$

γ) η μεσοκάθετος της βάσης **ΔΓ** διέρχεται από το σημείο **Η.**

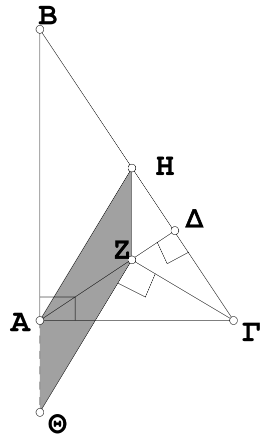


19. Έστω ένα ορθογώνιο τρίγωνο **ΑΒΓ (Α=90°).** Παίρνουμε ένα εσωτερικό σημείο **Ζ** του ύψους **ΑΔ** και φέρνουμε το τμήμα **ΖΓ.** Η κάθετη από το **Ζ** προς τη **ΖΓ** τέμνει την ευθεία **ΑΒ** στο **Θ.** Η παράλληλη από το **Α** προς τη **ΘΖ** τέμνει τη **ΒΓ** στο **Η.** Να αποδείξετε ότι:

α) $Γ Ζ \perp A H$

β) $H Z \perp A Γ$

γ) Το τετράπλευρο **ΑΗΖΘ** είναι παραλληλόγραμμο.



20. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο **ΑΒΓ** ($\widehat{A}=90^0$) με $\widehat{B}=30^0$.

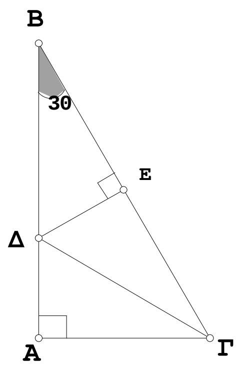
Στην πλευρά **ΑΒ** παίρνουμε σημείο **Δ** τέτοιο ώστε $Α Δ=\frac{1}{3}AB$.

Από το **Δ** φέρνουμε την **ΔΕ** κάθετη στη **ΒΓ.** Να αποδείξετε ότι:

α) **ΔΕ=ΑΔ**

β) Τα τρίγωνα **ΑΔΓ** και **ΕΔΓ** είναι ίσα.

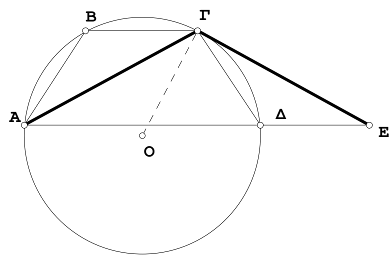
γ) $A\widehat{Δ}Γ=60^0$



21. Θεωρούμε ένα κύκλο **(Ο,R)** και τρεις ίσες χορδές του **ΑΒ,ΑΓ** και **ΓΔ.** Στην προέκταση της **ΑΔ** προς το **Δ** παίρνουμε τμήμα **ΔΕ=ΔΓ.** Να αποδείξετε ότι:

α) **ΓΑ=ΓΕ**

β) $O Γ \perp Γ E$

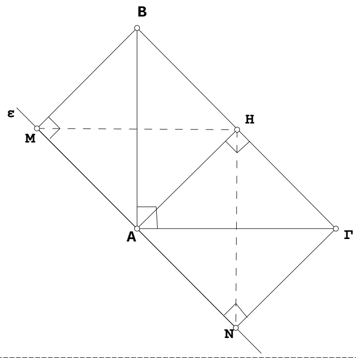


22. Δίνεται ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο **ΑΒΓ** **(** $\widehat{A}=90^0$ **)** και έξω από αυτό μια ευθεία **ε,** που διέρχεται από το **Α.** Φέρνουμε τα κάθετα τμήματα **ΒΜ** και **ΓΝ** προς την **ε** και το ύψος **ΑΗ** του τριγώνου **ΑΒΓ.** Να δείξετε ότι:

α) ΗΑ=ΗΒ=ΗΓ

β) ΜΝ=ΒΜ+ΓΝ

γ) Το τρίγωνο **ΜΗΝ** είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.



---

23. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο **ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ).** Κατασκευάζουμε τα τετράγωνα **ΑΒΔΖ** και **ΑΓΗΘ.** Αν **Μ** είναι το μέσο της **ΒΓ** να αποδείξετε ότι:

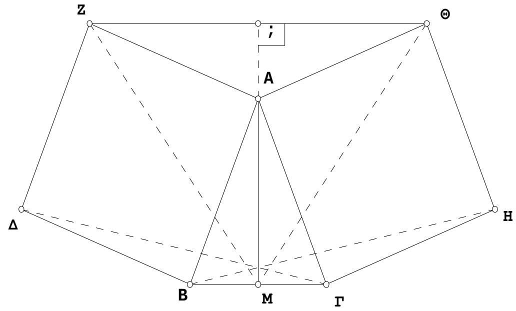
α) ΖΗ=ΘΗ

β) ΔΓ=ΒΗ

γ) ΑΜ $\perp$ **ΖΘ**

δ) ΖΘ=2ΑΜ

ε) Οι **ΔΓ** και **ΒΗ** τέμνονται πάνω στην **ΑΜ.**

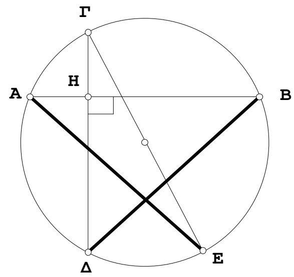


---

24. Δίνεται ένας και δύο κάθετες χορδές του **ΑΒ** και **ΓΔ.** Καλούμε **Ε** το αντιδιαμετρικό σημείο του **Γ.** Να αποδείξετε ότι:

α) ΑΒ//ΔΕ

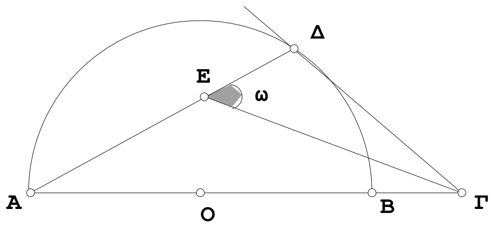
β) ΑΕ=ΔΒ



---

25. Θεωρούμε ημικύκλιο διαμέτρου **ΑΒ** και στην προέκταση της **ΑΒ** προς το **Β** ένα σημείο **Γ.** Από το **Γ** φέρνουμε το εφαπτόμενο τμήμα **ΓΔ** του ημικυκλίου αυτού. Η διχοτόμος της γωνίας $A\widehat{\Gamma}\Delta$ τέμνει τη χορδή **ΑΔ** στο **Ε.** Να αποδείξετε ότι:

$$\boxed{\Delta\widehat{E}\Gamma = 45^0}$$



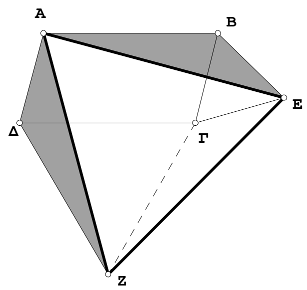
---

26. Έστω ένα παραλληλόγραμμο **ΑΒΓΔ.** Έξω από αυτό κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα **ΒΓΕ** και **ΖΔΓ.** Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα **ΑΔΖ** και **ΑΒΕ** είναι ίσα.

β) $Z\widehat{A}E = 60^0$

γ) Το τρίγωνο **ΑΕΖ** είναι ισόπλευρο.

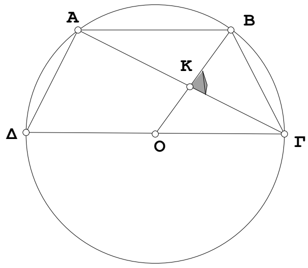


---

27. Δίνεται τραπέζιο **ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ)** εγγεγραμμένο σε κύκλο **(Ο,R)** του οποίου η πλευρά **ΔΓ** είναι διάμετρος. Η ακτίνα **ΟΒ** τέμνει την διαγώνιο **ΑΓ** στο **Κ.** Να δείξετε ότι:

α) Το **ΑΒΓΔ** είναι ισοσκελές.

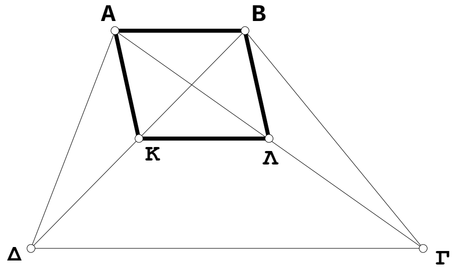
β) $\Gamma\widehat{K}B = 3A\widehat{\Gamma}\Delta$



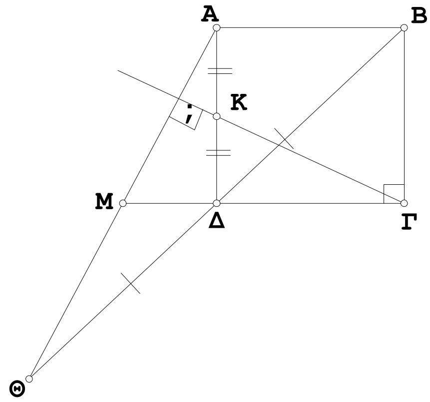
---

28. Δίνεται τραπέζιο **ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ)** με **ΓΔ=3ΑΒ,** και **Κ,Λ** τα μέσα των διαγωνίων του **ΔΒ** και **ΑΓ** αντίστοιχα.

α. Να αποδείξετε ότι το **ΑΚΛΒ** είναι παραλληλόγραμμο.
β. Αν επί πλέον το **ΑΒΓΔ** είναι ισοσκελές, να αποδείξετε ότι το **ΑΚΛΒ** είναι ορθογώνιο.

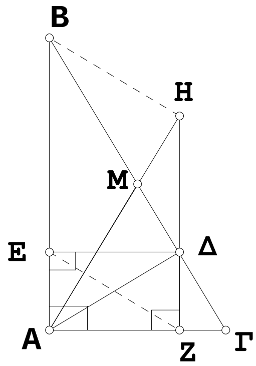


29. Δίνεται τετράγωνο **ΑΒΓΔ** και **Κ** το μέσο της **ΑΔ.** Στην προέκταση της ημιευθείας **ΒΔ** παίρνουμε σημείο **Θ** ώστε **ΔΘ=ΒΔ** και έστω **Μ** το σημείο που η **ΓΔ** τέμνει την **ΑΘ.**
Δείξτε ότι :
α. ΜΘ=ΜΑ
β. ΔΜ=ΔΚ
γ. ΓΚ=ΑΜ
δ. η ευθεία **ΓΚ** είναι κάθετη στην **ΑΘ.**



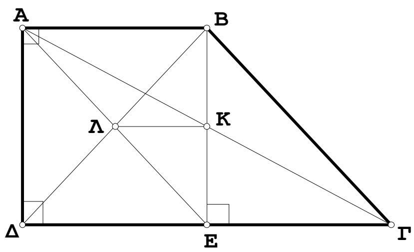
30. Σε ορθογώνιο τρίγωνο **ΑΒΓ** $\left(\hat{A}=90^{o}\right)$ φέρνουμε το ύψος **ΑΔ** και τη **ΔΕ** κάθετη στην **ΑΒ** και τη **ΔΖ** κάθετη στην **ΑΓ.** Αν η διάμεσος **ΑΜ** τέμνει τη **ΔΖ** στο **Η** να αποδείξετε ότι:

α. $B\hat{\Delta}E=\hat{\Gamma}$
β. τα τρίγωνα **ΑΗΖ** και **ΒΔΕ** είναι ίσα.
γ. το τετράπλευρο **ΒΕΖΗ** είναι παραλληλόγραμμο.
δ. ΑΔ = ΒΗ

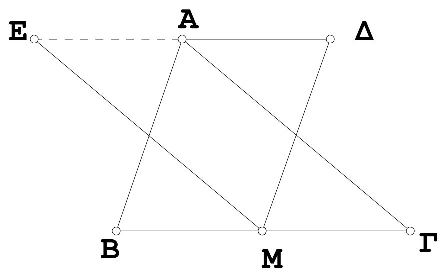


31. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A}=\hat{\Delta}=90^{0}$, $\Delta\Gamma=2AB$ και $\hat{B}=3\hat{\Gamma}$. Από το B φέρουμε κάθετη στη $\Gamma\Delta$ που τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο K και την $\Gamma\Delta$ στο E. Επίσης φέρουμε την AE που τέμνει τη $B\Delta$ στο σημείο Λ. Να δείξετε ότι:

α. $\hat{\Gamma}=45^{0}$
β. $B\Delta=AE$
γ. Το τρίγωνο $\Delta B\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.
δ. $\Lambda K=\dfrac{1}{4}\Delta\Gamma$



32. Δίνεται τρίγωνο **ΑΒΓ.** Από το μέσο **Μ** της **ΒΓ** γράφουμε ευθύγραμμο τμήμα ΜΔ ίσο και παράλληλο προς την **ΒΑ** και ένα άλλο **ΜΕ** ίσο και παράλληλο προς τη **ΓΑ** (τα σημεία **Δ** και **Ε** βρίσκονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη **ΒΓ** και το σημείο **Α**).
Να αποδείξετε ότι:
α. τα σημεία **Δ, Α, Ε** βρίσκονται στην ίδια ευθεία
β. ΔΑ=ΑΕ
γ. η περίμετρος του τριγώνου **ΜΔΕ** ισούται με την περίμετρο του **ΑΒΓ.**

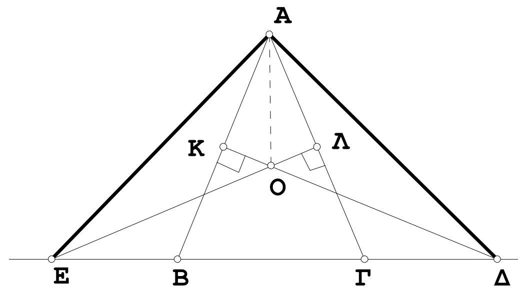


33. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο **ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ)** και **Κ , Λ** τα μέσα των πλευρών του **ΑΒ** και **ΑΓ** αντίστοιχα. Από το **Κ** φέρνουμε κάθετη στην **ΑΒ** που τέμνει την **ΒΓ** στο **Δ.** και από το **Λ** φέρνουμε κάθετη στην **ΑΓ** που τέμνει την **ΒΓ** στο **Ε.**

α. Δείξτε ότι **ΚΔ=ΕΛ.**
β. δείξτε ότι **ΕΒ=ΔΓ.**
γ. Δείξτε ότι το τρίγωνο **ΑΕΔ** είναι ισοσκελές.

δ. Εάν οι **ΚΔ** και **ΛΕ** τέμνονται στο **Ο**

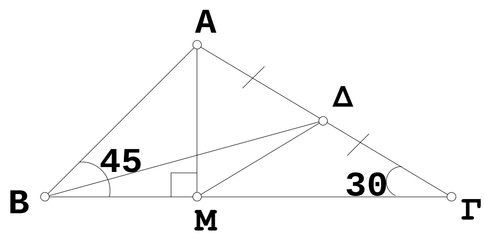
- **δ.1.** δείξτε ότι το τρίγωνο **ΕΟΔ** είναι ισοσκελές.
- **δ.2.** δείξτε ότι η ευθεία **ΑΟ** είναι μεσοκάθετος του **ΕΔ.**
- **δ.3.** δείξτε ότι η ευθεία **ΑΟ** είναι μεσοκάθετος του **ΒΓ.**
- **δ.4.** δείξτε ότι το **Ο** είναι σημείο της διχοτόμου της γωνίας **ΔΑΕ.**



---

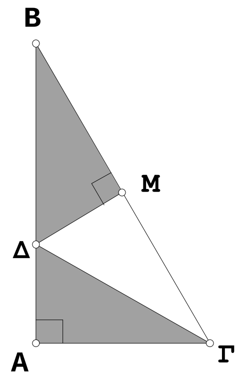
34. Δίνεται τρίγωνο **ΑΒΓ** με $\widehat{B}=45^0$ και $\widehat{\Gamma}=30^0$. Αν **Δ** είναι το μέσο της **ΑΓ** και **ΑΜ**$\perp$**ΒΓ** να αποδείξετε:

α. Το τρίγωνο **ΒΜΔ** είναι ισοσκελές.
β. $\Delta\widehat{B}\Gamma=15^0$.



---

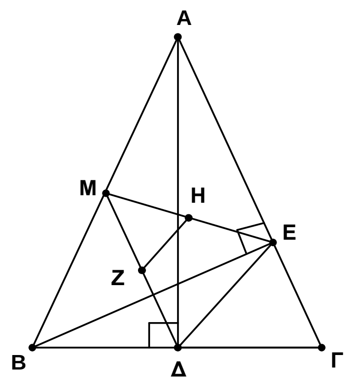
35. Από το μέσο **Μ** της υποτείνουσας **ΒΓ** ορθογώνιου τρίγωνου **ΑΒΓ**($\widehat{A}=90^0$) και **ΑΒ>ΑΓ** φέρνουμε κάθετη προς την **ΒΓ,** η οποία τέμνει την πλευρά **ΑΒ** στο σημείο **Δ.** Αν τα τρίγωνα **ΔΜΒ** και **ΔΑΓ** είναι ίσα, να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου **ΑΒΓ** (ΕΜΕ 2002).



---

36. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο **ΑΒΓ** με **ΑΒ=ΑΓ** και τα ύψη του **ΑΔ** και **ΒΕ.** Αν το **Μ** είναι μέσο της πλευράς **ΑΒ,** τότε:

α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο **ΔΜΕ** είναι ισοσκελές.
β. Αν **Ζ, Η** είναι τα μέσα των **ΜΔ** και **ΜΕ** αντίστοιχα και επιπλέον ισχύει **ΜΔ=6cm** και **ΖΗ=2cm,** να υπολογίσετε τις πλευρές του τριγώνου **ΑΒΓ.**
γ. Να εξετάσετε αν το τετράπλευρο **ΑΒΔΕ** είναι εγγράψιμο.



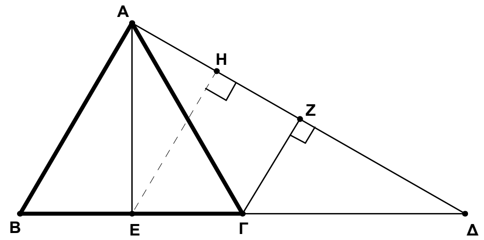
---

37. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο **ΑΒΓ** και το ύψος του **ΑΕ.** Στην προέκταση της **ΒΓ** προς το **Γ** παίρνουμε τμήμα **ΓΔ=ΒΓ.**

α) Να δειχθεί ότι $AE=\dfrac{A\Delta}{2}$.

β) Αν **ΓΖ**$\perp$**ΑΔ,** να δειχθεί ότι $\Gamma Z=\dfrac{AB}{2}$.

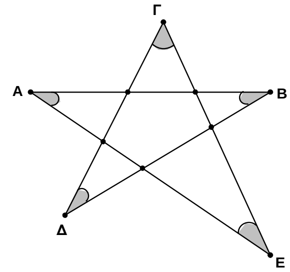
γ) Αν η πλευρά του τριγώνου **ΑΒΓ** είναι **4cm** και **ΕΗ**$\perp$**ΑΔ,** να υπολογίσετε το τμήμα **ΕΗ.**



---

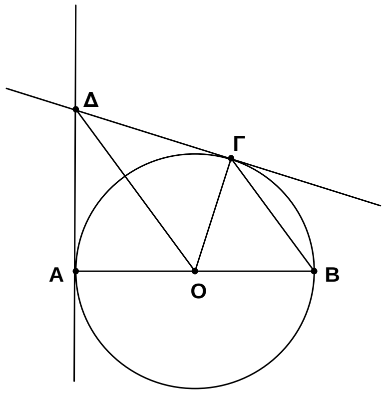
38. Στο διπλανό σχήμα (αστέρι) τα τρίγωνα που σχηματίζονται είναι τυχόντα. Να δείξετε ότι:

$$\boxed{\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}+\hat{\Delta}+\hat{E}=180^0}$$



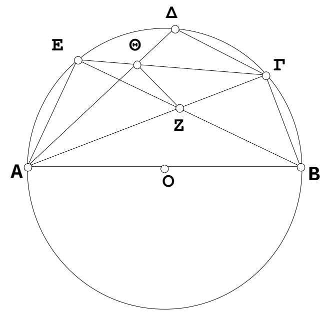
39. Δίνεται κύκλος με κέντρο O, μια διάμετρός του AB και ένα σημείο του Γ διαφορετικό από τα A και B. Οι εφαπτόμενες του κύκλου στα A και Γ τέμνονται στο Δ. Να δείξετε ότι:

α. Το τετράπλευρο $A\Delta\Gamma O$ είναι εγγράψιμο.
β. $B\Gamma // O\Delta$
γ. $A\Gamma \perp \Delta O$



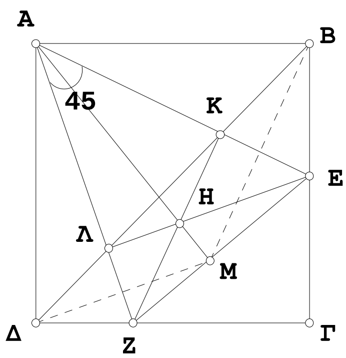
40. Θεωρούμε κύκλο διαμέτρου **ΑΒ.** Δύο ίσες χορδές του **ΒΓ** και **ΓΔ** και ένα εσωτερικό σημείο **Ε** του τόξου **ΔΑ.** Οι **ΑΓ** και **ΒΕ** τέμνονται στο **Ζ** και οι **ΑΔ** και **ΓΕ** τέμνονται στο **Θ.** Να δείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο **ΑΖΘΕ** είναι εγγράψιμο.
β) $Z\Theta \perp A\Delta$
γ) $Z\Theta // B\Delta$
δ) Το **Ζ** ισαπέχει από την **ΑΒ** και το **Θ.**



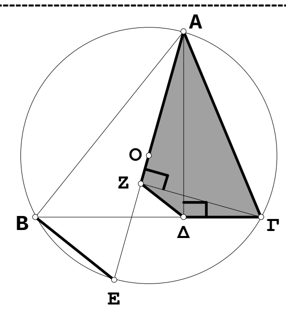
41.
Δίνεται τετράγωνο **ΑΒΓΔ.** Τα σημεία **Ε** και **Ζ** βρίσκονται πάνω στις πλευρές **ΒΓ** και **ΓΔ** αντίστοιχα έτσι, ώστε η γωνία **ΕΑΖ=45°.** Οι **ΑΕ** και **ΑΖ** τέμνουν τη **ΒΔ** στα σημεία **Κ** και **Λ** αντίστοιχα. Οι **ΕΛ** και **ΖΚ** τέμνονται στο **Η** και η **ΑΗ** τέμνει τη **ΖΕ** στο **Μ.** Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τετράπλευρα **ΑΛΕΒ** και **ΔΖΚΑ** είναι εγγράψιμα.
β) **ΖΚ**$\perp$**ΑΕ και ΕΛ**$\perp$**ΑΖ**
γ) **ΑΜ**$\perp$**ΖΕ**
δ) $\Delta\widehat{M}B=135^0$

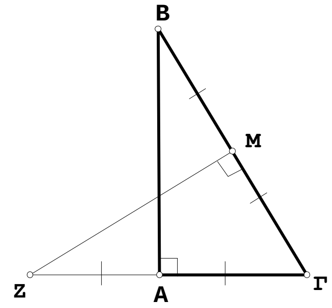


42.
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο O. Φέρουμε το ύψος του $A\Delta$ και τη διάμετρο AE.. Αν Z είναι η προβολή του Γ στην AE, να δείξετε ότι:

α. Το τετράπλευρο $AZ\Delta\Gamma$ είναι εγγράψιμο.
β. $Z\Delta // BE$
γ. $Z\Delta \perp AB$



43. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ $(\widehat{A}=90^0)$, M μέσο της $B\Gamma$ και η μεσοκάθετος από το M τέμνει την ΓA στο Z. Αν A μέσο του ΓZ να βρεθούν οι γωνίες του $AB\Gamma$.



44.