ΤΑΞΗ Β΄
ΥΛΗ ΓΙΑ ΤΟ ΠΡΟΧΕΙΡΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Α ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ
ΤΡΙΤΗ 11 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2011

Α ΕΞΕΤΑΣΤΕΑ ΥΛΗ (Από το βιβλίο της Β Λυκείου):

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο Τριγωνομετρία

§ 1.2 Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις.

Θεωρία: Οι τύποι για την επίλυση των βασικών τριγ, εξισώσεων (χωρίς αποδείξεις)
Παραδείγματα σελ. 20, 22,23
Ασκήσεις: 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11 (Α Ομάδας) 1,2,3 (Β Ομάδας)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο Πολυώνυμα-Πολυωνυμικές εξισώσεις.

§ 2.1 Πολυώνυμα.

Θεωρία: Όλα
Παραδείγματα-Εφαρμογές σελ. 83
Ασκήσεις: 1,2,3,4,5,6,7 (Α Ομάδας) 1,2,3,4,5 (Β Ομάδας)

§ 2.2 Διαίρεση πολυωνύμων.

Θεωρία: Όλα
Παραδείγματα-Εφαρμογές σελ. 68, 69
Παράδειγμα 1 σελ. 71
Ασκήσεις: 1,2,3,4,5,6,10 (Α Ομάδας) 3 (Β Ομάδας)

§ 2.3 Πολυωνυμικές εξισώσεις.

Θεωρία: Όλα εκτός από την απόδειξη του θεωρήματος των ακέραιων ριζών)
Παραδείγματα 1,2 σελ. 79
Προσδιορισμός ρίζας με προσέγγιση όχι
Παράδειγμα 1 σελ. 77 όχι
Ασκήσεις: 1,2,3,4,5,6,7 (Α Ομάδας) 1,,2, 3, 5 (Β Ομάδας)

§ 2.4 Εξισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές.

Παράδειγμα 1 σελ 81
Ασκήσεις 1,2,3 (Α Ομάδας) 5 (Β Ομάδας)

Β ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1η :

Να βρεθεί η πραγματική τιμή του λ , ώστε το πολυώνυμο:

$$P(x)=\left(9\lambda^3-\lambda\right)x^2+\left(3\lambda^2+5\lambda-2\right)x+3\lambda+1$$

να είναι μηδενικού βαθμού.

Άσκηση 2η :

Να προσδιοριστεί η πραγματική τιμή του λ , ώστε το πολυώνυμο:

$$P(x)=\left(\lambda^2+2\lambda-3\right)x^2-\left(1-\lambda\right)x+2\lambda^2-3\lambda+1$$

να είναι το μηδενικό.

Άσκηση 3η :

Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του λ, να προσδιοριστεί ο βαθμός του πολυωνύμου:

$$P(x)=\lambda\left(4\lambda^2-1\right)x^3+\left(4\lambda^2-1\right)x^2-\left(2\lambda+1\right)x-2\lambda+1$$

Άσκηση $4^η$:

Έστω $P(x)=x^2+2x+3$ και $Q(x)=\alpha x+\beta$,όπου α,β είναι πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε τις τιμές των α,β ώστε το πολυώνυμο $\phi(x)=\alpha x^3+5x^2+8x+\alpha+\beta$ ισούται με το πολυώνυμο $P(x)\cdot Q(x)$.

Άσκηση $5^η$:

Δίνεται πολυώνυμο $P(x)=x^3-(\alpha+3)x^2+(2\beta+1)x-2\alpha$, όπου α,β είναι πραγματικοί αριθμοί.

α. Αν ο αριθμός 2 είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ δια του $x+1$ είναι -18, να βρεθούν οι τιμές των α,β.

β. Για $\alpha=2$ και $\beta=\dfrac{7}{2}$:

i. Να λυθεί η εξίσωση $P(x)=0$.

ii. Να γίνει η διαίρεση του $P(x)$ δια του x^2+1 και να γραφεί η ταυτότητα που προκύπτει από αυτή τη διαίρεση.

iii. Να λυθεί η ανίσωση $P(x)\geq 7x+1$

Άσκηση $6^η$:

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4-8x^3+(5\alpha-1)x^2+8x-3\alpha-6$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$.

α. Να κάνετε την διαίρεση του P(x) δια του x^2-1 και να γράψετε τη σχετική ταυτότητα.

β. Να βρείτε την τιμή του α, ώστε η παραπάνω διαίρεση να είναι τέλεια.

γ. Για $\alpha=3$

i. να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

ii. να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ βρίσκεται στο $2^ο$ τεταρτημόριο.

Άσκηση $7^η$:

Δίνονται οι εξισώσεις: $x^3-x^2-x-2=0$ και $6x^3-(\lambda^2+16)x^2+(\lambda+10)x-2=0$, όπου λ ακέραιος αριθμός. Αν οι δύο εξισώσεις έχουν κοινή ρίζα:

α. Να αποδείξετε ότι $\lambda=1$.

β. Να λύσετε την εξίσωση: $6\eta\mu^3x-(\lambda^2+16)\eta\mu^2x+(\lambda+10)\eta\mu x-2=0$

Άσκηση $8^η$:

Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in\mathbb{Z}^*$ ώστε η εξίσωση $x^3+(2-\alpha)x+\alpha-1=0$ να έχει μία τουλάχιστον ακέραια ρίζα και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση για τη μεγαλύτερη τιμή του α που βρήκατε.

Άσκηση $9^η$:

Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=x^3-2x^2+x-2$$

α) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

β) Αν το πολυώνυμο

$$Q(x)=x-2\sigma\upsilon\nu^2\theta-3\sigma\upsilon\nu\theta,\ \ \theta\in\mathbb{R}$$

είναι παράγοντας του $P(x)$, να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού θ.

Άσκηση $10^η$:

Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=x^4-5x^3+\alpha x+\beta,\ \ \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

το οποίο διαιρείται ακριβώς με το x^2+x+1.

α) Να δείξετε ότι $\alpha=-1$ και $\beta=5$.

β) Να λύσετε τις εξισώσεις: $P(x)=0$ και $P(2\sigma\upsilon\nu x+2)=0$.

Άσκηση 11η :

Έστω P(x) πολυώνυμο 3ου βαθμού, το οποίο διαιρείται με το πολυώνυμο x^2+1, έχει ρίζα το 0 και του οποίου το άθροισμα των συντελεστών είναι ίσο με 2.

α. Να αποδείξετε ότι $P(x)=x^3+x$.

β. Να λύσετε την ανίσωση: $\left(P(x)-2\right)^3+\left(P(x)-2\right)^2+P(x)>2$

Άσκηση 12η :

Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x)=x^4+\left(\alpha^2+\beta^2\right)x^3-3x^2+2(\alpha-1)x-4 \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

το οποίο διαιρούμενο με το $x-1$ δίνει υπόλοιπο -9.

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha=-1$ και $\beta=0$.

β. Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου

$$Q(x)=\left(x^{5944}+P(x)\right)^2-x^{11888}$$

γ. Να λύσετε τις εξίσωση : $P(x)=0$.

δ. Να βρείτε δύο ρίζες της εξίσωσης $Q(x)=0$

ε. Να λύσετε τις εξίσωση : $P\left(\varepsilon\varphi^2 x+\sigma\varphi^2 x\right)=0$.

Ιστορικό Σημείωμα:

Horner scheme (also known as *Horner **algorithm***) is named after William George Horner (British mathematician, 1786 – 22 September 1837), described it in 1819. The method was already known to Isaac Newton in 1669, the Chinese mathematician Qin Jiushao in his *Mathematical Treatise in Nine Sections* in the 13th century, and even earlier to the Persian Muslim mathematician Sharaf al-Dīn al-Tūsī in the 12th century. The earliest use of Horner's scheme was in *The Nine Chapters on the Mathematical Art*, a Chinese work of the Han Dynasty (202 BC – 220 AD) edited by Liu Hui. (*From Wikipedia, the free encyclopedia)*

Άσκηση 13η :

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ).

1. Αν ο ακέραιος ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου ενός πολυωνύμου $P(x)$ με ακέραιους συντελεστές τότε, το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-\rho$.
2. Για κάθε πολυώνυμο $P(x)$ το $P(1)$ είναι ίσο με το άθροισμα των συντελεστών του, ενώ το $P(0)$ είναι ίσο με το σταθερό όρο του.
3. Όλα τα πολυώνυμα έχουν βαθμό.
4. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ με ακέραιους συντελεστές και σταθερό όρο 12 έχει ακέραια ρίζα ρ με $\rho>7$ τότε υποχρεωτικά θα είναι $\rho=12$.
5. Ο βαθμός του αθροίσματος δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών τους.
6. Η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $f(x)=x^{2010}+x^2+1$, βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0,1)$.
7. Μία διαίρεση λέγεται τέλεια όταν το υπόλοιπο της διαίρεσης αυτής είναι πολυώνυμο μηδενικού βαθμού.
8. Ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών τους.
9. Το σχήμα Horner περιέγραψε το 1819 ο William George Horner.