

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$, και $\theta > 0$, $\kappa \in \mathbb{R}$:

i) Να δώσετε τον ορισμό του λογάριθμου του θ ως προς βάση α

Μονάδες 5

ii) Να αποδείξετε ότι ισχύει: $\log_{\alpha} \theta^{\kappa} = \kappa \cdot \log_{\alpha} \theta$

Μονάδες 10

B. Να χαρακτηρίσετε ως (Σ) Σωστή ή (Λ) Λάθος κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:

1. Η συνάρτηση $f(x) = e^x$ είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

2. Για κάθε γωνία α ισχύει ότι: $\eta\mu^2\alpha = \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$

3. Κάθε σταθερό και μη μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό μηδέν.

4. Η συνάρτηση $f(x) = \ln x$, $x > 0$, είναι γνησίως αύξουσα και η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σημείο με τετμημένη e .

5. Ο βαθμός του αθροίσματος δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^4 - 5x^3 + (\alpha + 2)x^2 + \alpha x, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ δια του $x - 2$ είναι ίσο με -10 :

α) να δείξετε ότι $\alpha = 1$.

Μονάδες 5

β) να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ δια του $(x - 2)^2$ και να γράψετε την ταυτότητα που προκύπτει από αυτή τη διαίρεση.

Μονάδες 10

γ) να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $f(x) = P(x)$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \frac{1}{2} \text{ συν} 2\theta$ και $\alpha_3 = -2\eta\mu^2\theta$.

α) Να δειχθεί ότι οι παραπάνω αριθμοί, για κάθε τιμή του θ , αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

Μονάδες 7

β) Έστω (α_n) αριθμητική πρόοδος της οποίας οι παραπάνω αριθμοί, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ αποτελούν με τη σειρά που δίνονται, τους τρεις πρώτους όρους της.

i) Να βρεθεί η τιμή του $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, αν το $\omega = -1$, όπου ω είναι η διαφορά της αριθμητικής προόδου (α_n) .

Μονάδες 8

ii) Αν $\theta = \frac{\pi}{4}$, να υπολογιστεί το άθροισμα:

$$S = (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) + (\alpha_3^2 - \alpha_4^2) + \dots + (\alpha_{63}^2 - \alpha_{64}^2)$$

όπου $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{64}$ είναι οι 64 πρώτοι όροι της αριθμητικής προόδου (α_n) .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \log(10^x - 1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

Μονάδες 5

β) Να λύσετε την εξίσωση: $f(2x) = \log 7 + f(x)$

Μονάδες 13

γ) Να αποδείξετε ότι: $10^{f(1)} + 2 \cdot 10^{f(3)} = 2007$

Μονάδες 7