ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

ΘΕΜΑ 1°

Α. Αν $\alpha>0$ με $\alpha\neq 1$, και $\theta_1,\theta_2>0$, να δείξετε ότι:

$$\boxed{\log_\alpha(\theta_1\cdot\theta_2)=\log_\alpha\theta_1+\log_\alpha\theta_2}$$

Μονάδες 15

Β. Να χαρακτηρίσετε ως (Σ) Σωστή ή (Λ) Λάθος κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:

1. Ισχύει ότι: $10^{\log 5}=5\log 10$

2. Το άθροισμα των ν πρώτων διαδοχικών όρων μιας αριθμητικής προόδου (α_ν) με διαφορά ω είναι ίσο με: $S_\nu=2\alpha_1+(\nu+1)\omega$.

3. Για κάθε γωνία α ισχύει ότι: $\eta\mu^2\alpha=\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$

4. Κάθε σταθερό και μη μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό ένα.

5. Ισχύει ότι: $\eta\mu(\alpha+\alpha)=2\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\eta\mu\alpha$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2°

Αν

$$A(x)=(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^2-\eta\mu 2x \quad \text{και} \quad B(x)=\sigma\upsilon\nu^4 x-\eta\mu^4 x$$

α) Να δείξετε ότι για κάθε τιμή του x ισχύει:

$$A(x)=1 \quad \text{και} \quad B(x)=\sigma\upsilon\nu 2x$$

Μονάδες 12

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει ότι:

$$\sqrt{2}B(x)-A(x)=0$$

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 3°

Δίνονται τα πολυώνυμα:

$$P(x)=x^3+ax^2+62x+40 \quad \text{και} \quad Q(x)=x+1 \quad \text{με } a\in R.$$

α) Να βρείτε για ποια τιμή του **α** το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $Q(x)$.

Μονάδες 8

β) Για $a = 23$:

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $\mathrm{P}(x)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 10

ii) Να βρείτε για ποια τιμή του πραγματικού αριθμού β οι αριθμοί

$$P(-1), \quad \beta-28, \quad P(Q(9))$$

αποτελούν, με η σειρά που δίνονται, διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x) = 3^{\log x}$ και $g(x) = x^{\log 3}$ με $x > 0$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε $x, y > 0$ ισχύει:

i) $f(x) = g(x)$ και

ii) $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$

Μονάδες (4+6=10)

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$9^{\log x} - 8 \cdot x^{\log 3} - 9 = 0$$

Μονάδες 15

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΡΙΣΤΟΣ ΜΕΛΕΤΟΠΟΥΛΟΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ
Β' ΛΥΚΕΙΟΥ (2007-08).

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω $x_1 = \log_a \theta_1$ και $x_2 = \log_a \theta_2$. Τότε θα έχουμε:

$\left.\begin{array}{l}\theta_1 = a^{x_1} \\ \theta_2 = a^{x_2}\end{array}\right\} \xRightarrow{\text{πολ/με}}$ $\theta_1 \cdot \theta_2 = a^{x_1} \cdot a^{x_2} \Leftrightarrow a^{x_1+x_2} = \theta_1 \cdot \theta_2$. Οπότε από τον ορισμό του λογαρίθμου θα έχουμε:

$$\log_a(\theta_1 \theta_2) = x_1 + x_2 \Leftrightarrow \boxed{\log_a(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2}$$

Β. Σ, Λ, Λ, Λ, Σ

ΘΕΜΑ 2ο:

α) $A(x) = (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2 - \eta\mu 2x = \underbrace{\eta\mu^2 x + 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x}_{1} - \eta\mu 2x =$

$= 1 + 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x - 2\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x =$

$= 1.$

$B(x) = \sigma\upsilon\nu^4 x - \eta\mu^4 x = (\sigma\upsilon\nu^2 x)^2 - (\eta\mu^2 x)^2 =$

$= (\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x)(\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x) =$

$= 1 \cdot (\sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu^2 x) = \sigma\upsilon\nu 2x$

β) $\sqrt{2}\, B(x) - A(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\sqrt{2}\, \sigma\upsilon\nu 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot \sigma\upsilon\nu 2x = 1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 2x = \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow 2x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$

$$\boxed{x = \kappa\pi \pm \frac{\pi}{8}, \ \kappa \in \mathbb{Z}}$$

Θεμα 3ο:

α) Επειδή τη $Q(x)=x+1$ είναι παράγοντας της $P(x)$ θα έχουμε:

$$P(-1)=0 \Leftrightarrow (-1)^3+\alpha(-1)^2+62(-1)+40=0 \Leftrightarrow$$

$$-1+\alpha-62+40=0 \Leftrightarrow \alpha-23=0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha=23}$$

β) i) Θα πρέπει $P(x)<0 \Leftrightarrow$

$$x^3+23x^2+62x+40<0 \quad (1)$$

Παραγοντοποιούμε το πολυώνυμο του πρώτου μέλους.

1	23	62	40	−1
	−1	−22	−4	
1	22	40	0	

άρα $x^3+23x^2+62x+40=(x+1)(x^2+22x+40)=$

$$=(x+1)(x+2)(x+20)$$

x	$-\infty$	-20		-2		-1	$+\infty$
$x+1$	−		−		−	0	+
$x+2$	−		−	0	+		+
$x+20$	−	0	+		+		+
$P(x)$	−	0	+	0	−	0	+

Άρα (1) $\Leftrightarrow$

$$x \in (-\infty,-20) \cup (-2,-1)$$

ii) $P(-1)=0$, $P(Q(9))=P(1+9)=P(10)=$

$$1000+2300+620+40=3760$$

Για να είναι οι αριθμοί

$P(-1)$ $\beta-28$ και $P(Q(9))$

διαδοχικοί όροι α.π. θα πρέπει:

$$2(\beta-28)=P(-1)+P(Q(9)) \Leftrightarrow$$

$$2(\beta-28)=0+3760 \Leftrightarrow \beta-28=1980 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\beta=2008}$$

ΘΕΜΑ 4ο

α) i) $f(x)=f(y) \Leftrightarrow$

$3^{\log x} = x^{\log 3} \Leftrightarrow$ (λογαριθμίζουμε)

$\log 3^{\log x} = \log x^{\log 3} \Leftrightarrow$

$\log x \cdot \log 3 = \log 3 \cdot \log x$ που ισχύει.

ii) $f(x \cdot y) = 3^{\log(xy)} = 3^{\log x + \log y} = 3^{\log x} \cdot 3^{\log y} = f(x) f(y)$

β) $9^{\log x} - 8 \cdot x^{\log 3} - 9 = 0 \overset{(i)}{\Leftrightarrow}$

$(3^2)^{\log x} - 8 \cdot 3^{\log x} - 9 = 0 \Leftrightarrow$

$(3^{\log x})^2 - 8 \cdot 3^{\log x} - 9 = 0 \Leftrightarrow$ θέτουμε $3^{\log x} = \omega$

$\omega^2 - 8\omega - 9 = 0 \Leftrightarrow$

$\omega = 9$ ή $\omega = -1$ (απορρίπτεται)

$3^{\log x} = 9 \Leftrightarrow 3^{\log x} = 3^2 \Leftrightarrow \log x = 2 \Leftrightarrow$

$\log x = \log 10^2 \Leftrightarrow \boxed{x = 100 > 0}$ δεκτή.

ΚΑΛΟ ΚΑΛΟΚΑΙΡΙ!!