ΤΑΞΗ Β΄
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ
ΣΤΗΝ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΘΕΜΑ 1ο :

Α. Αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$, να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε θετικούς πραγματικούς αριθμούς θ_1, θ_2 ισχύει:

$$\boxed{\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2}$$

(15 μονάδες)

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με την ένδειξη (Σ) Σωστό ή (Λ) Λάθος.

1. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, με $\alpha > 1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει αν $x_1 < x_2$ τότε $\alpha^{x_1} < \alpha^{x_2}$.

2. Ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το γινόμενο των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

3. Τρεις αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει

$$\beta = \frac{\alpha+\gamma}{2}.$$

4. Αν $\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\theta$, τότε $x = 2\kappa\pi + \theta$ με $\kappa \in \mathbb{Z}$.

5. Ο βαθμός κάθε σταθερού και μη μηδενικού πολυωνύμου είναι μηδέν.

(10 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2ο :

Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = x^3 - (\alpha+3)x^2 + 8x - 2\alpha, \text{ όπου } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x+1$ είναι ίσο με -18:

Α. Να βρείτε την τιμή του α.

(7 μονάδες)

Β. Για $\alpha = 2$:

α. Να κάνετε τη διαίρεση του $P(x)$ δια του πολυωνύμου x^2+1 και στη συνέχεια να γράψετε το $P(x)$ με την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης.

(8 μονάδες)

β. Να λύσετε την ανίσωση: $P(x) \geq 7x + 1$.

(10 μονάδες)

ΘΕΜΑ 3ο :

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \log\left(\frac{x+1}{x}\right).$$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(8 μονάδες)

β. Να αποδείξετε ότι:

$$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(999) = 3.$$

(7 μονάδες)

γ. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) = 1 - 3\log 2.$$

(10 μονάδες)

ΘΕΜΑ 4ο :

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω στην οποία, το άθροισμα των 30 πρώτων όρων της είναι ίσο με 2010, δηλαδή είναι

$$S_{30} = 2010.$$

α. Να υπολογίσετε το άθροισμα: $\alpha_{11} + \alpha_{14} + \alpha_{17} + \alpha_{20}$.

(8 μονάδες)

β. Αν επιπλέον $\alpha_4 = 21$, να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και τη διαφορά ω της προόδου.

(7 μονάδες)

γ. Να λύσετε την εξίσωση:

$$2\sigma\upsilon\nu x + 2\alpha_1 \cdot \sigma\upsilon\nu x + 2\alpha_2 \cdot \sigma\upsilon\nu x + \cdots + 2\alpha_{30} \cdot \sigma\upsilon\nu x + 2011 = 0$$

όπου $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{30}$ είναι όροι της αριθμητικής προόδου (α_ν).

(10 μονάδες)

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!

Υμηττός, 30/5/2011