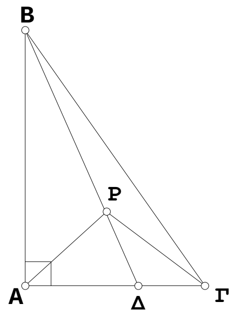
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΛΟΓΟΣ ΕΜΒΑΔΩΝ ΟΜΟΙΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ-ΠΟΛΥΓΩΝΩΝ

---

1. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο **ΑΒΓ** ($\widehat{A}=90^0$), σημείο **Δ** της πλευράς **ΑΓ** και σημείο **Ρ** της **ΒΔ** ώστε $P\Delta=\frac{2}{5}B\Delta$. Αν $(AB\Gamma)=30$, να αποδείξετε ότι:

$$\boxed{(AP\Gamma)=12}$$



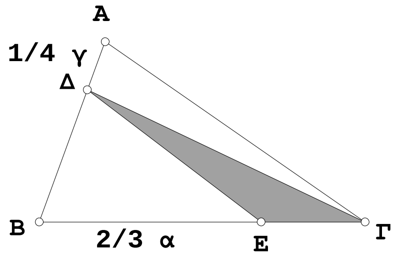
---

2. Στο διπλανό σχήμα έχουμε τρίγωνο **ΑΒΓ.** Αν είναι

$$A\Delta=\frac{1}{4}\gamma \quad , \quad BE=\frac{2}{3}\alpha$$

να δείξετε ότι:

$$\boxed{(AB\Gamma)=4(\Delta E\Gamma)}$$



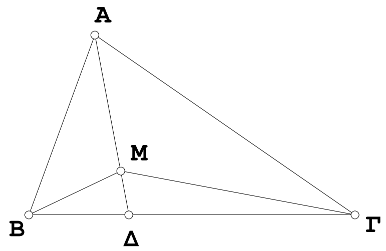
---

3. Στο διπλανό σχήμα έχουμε τρίγωνο **ΑΒΓ.** Αν είναι

$$B\Delta=\frac{B\Gamma}{3} \quad , \quad \Delta M=\frac{\Delta A}{4}$$

Να αποδείξετε ότι:

i) $\boxed{(MB\Gamma)=\frac{1}{4}(AB\Gamma)}$ **ii)** $\boxed{(MAB)=\frac{1}{4}(AB\Gamma)}$

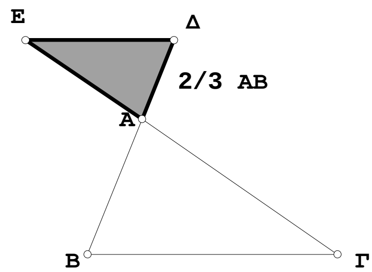


---

4. Το τρίγωνο **ΑΒΓ** στο διπλανό σχήμα έχει εμβαδόν 18.

Αν $A\Delta=\frac{2}{3}AB$ και $\Delta E // B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

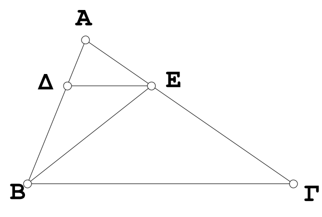
$$\boxed{(A\Delta E)=8}$$



---

5. Στο διπλανό σχήμα **ΑΒΓ** είναι $A\Delta=\frac{2}{5}AB$ και $\Delta E // B\Gamma$. Αν $(AB\Gamma)=75$ να αποδείξετε ότι:

i) $\boxed{(A\Delta E)=12}$ **ii)** $\boxed{(B\Delta E)=18}$



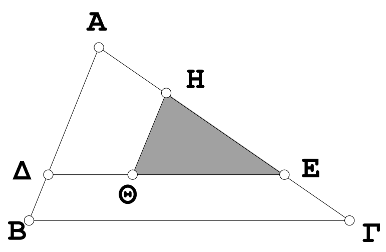
---

6. Στο διπλανό σχήμα έχουμε τρίγωνο **ΑΒΓ**,

$\Delta B=\frac{1}{4}AB$, $\Delta E // B\Gamma$, $AH=\frac{1}{3}A\Gamma$, $H\Theta // AB$.

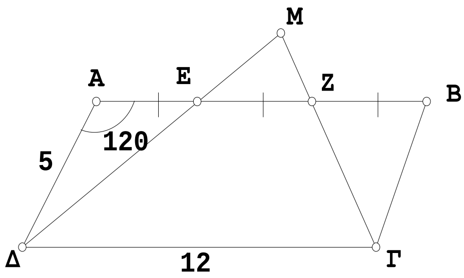
Να αποδείξετε ότι:

$$\boxed{(H\Theta E)=\frac{25}{144}(AB\Gamma)}$$



---

7. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το παραλληλόγραμμο **ΑΒΓΔ** με $\widehat{A}=120^0$, $\Gamma\Delta=12$ και $A\Delta=5$. Αν $AE=EZ=ZB$ να αποδείξετε ότι:

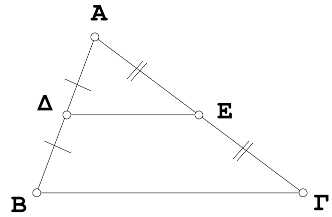


i) $\boxed{(AB\Gamma\Delta)=30\sqrt{3}}$ ii) $\boxed{(EZ\Gamma\Delta)=20\sqrt{3}}$

iii) $\boxed{(MEZ)=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}}$

---

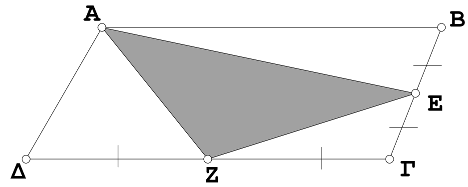
8. **Α.** Δίνεται τρίγωνο **ΑΒΓ** και **Δ,Ε** τα μέσα των **ΑΒ,ΑΓ** αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:



i) $(A\Delta E)=\dfrac{1}{4}(AB\Gamma)$

ii) $(B\Delta E\Gamma)=3(A\Delta E)$

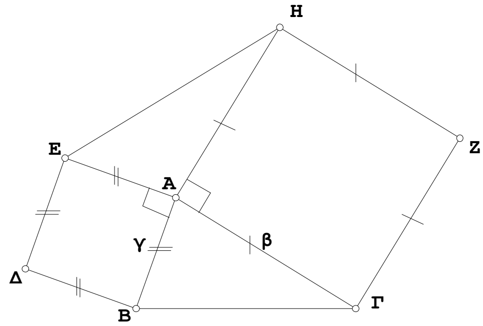
Β. Αν **Ε,Ζ** είναι τα μέσα των πλευρών **ΒΓ,ΓΔ** ενός παραλληλογράμμου **ΑΒΓΔ,** να δείξετε ότι:



$\boxed{(AEZ)=\dfrac{3}{8}(AB\Gamma\Delta)}$

---

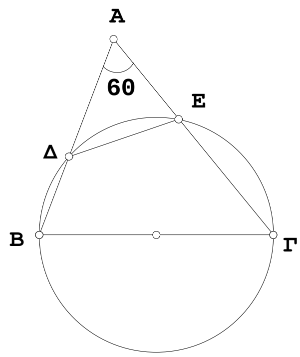
9. Δίνεται τρίγωνο **ΑΒΓ** με εμβαδόν **Ε** και τα τετράγωνα **ΑΒΔΕ,ΑΓΖΗ.** Να δείξετε ότι:



$\boxed{(\Delta EHZ\Gamma B)=\beta^2+\gamma^2+2E}$

---

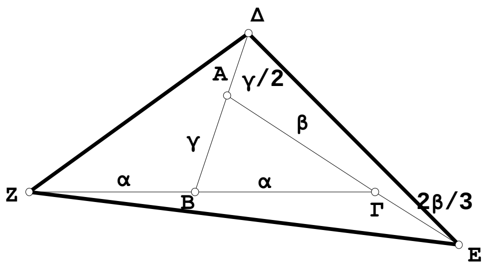
10. Δίνεται τρίγωνο **ΑΒΓ** με $\widehat{A}=60^0$. Αν ο κύκλος διαμέτρου **ΒΓ** τέμνει τις **ΑΒ** και **ΑΓ** στα **Δ** και **Ε** αντίστοιχα, να δείξετε ότι:



$\boxed{\left(A\Delta E\right)=\dfrac{1}{4}(AB\Gamma)}$

---

11. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το τρίγωνο **ΑΒΓ** και $A\Delta=\dfrac{AB}{2}$, $\Gamma E=\dfrac{2A\Gamma}{3}$, $BZ=B\Gamma$. Να δείξετε ότι:



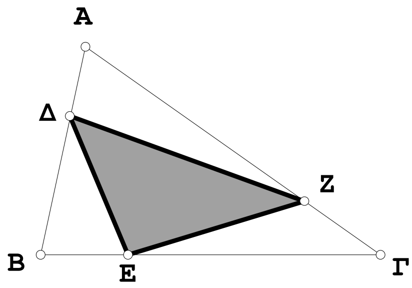
$\boxed{(\Delta EZ)=\dfrac{14}{3}(AB\Gamma)}$

---

12. Στις πλευρές **ΑΒ,ΒΓ,ΑΓ** τριγώνου **ΑΒΓ** παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία **Δ,Ε,Ζ** τέτοια ώστε:

$\mathrm{A\Delta} = \lambda \cdot \mathrm{AB}$, $\mathrm{BE} = \lambda \cdot \mathrm{B\Gamma}$ και $\Gamma\mathrm{Z} = \lambda \cdot \Gamma\mathrm{A}$

όπου $0 < \lambda < 1$.



i) Να αποδείξετε ότι: $\boxed{\dfrac{(\mathrm{A\Delta Z})}{(\mathrm{AB\Gamma})} = \lambda(1-\lambda)}$

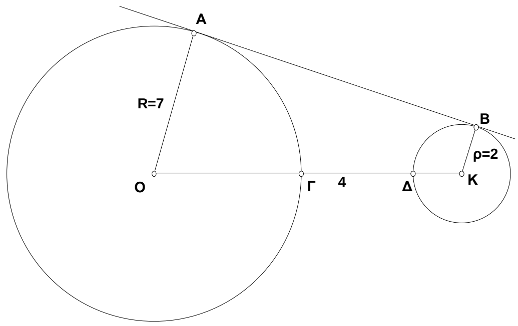
ii) Να αποδείξετε ότι: $\boxed{\dfrac{(\Delta\mathrm{EZ})}{(\mathrm{AB\Gamma})} = 3\lambda^2 - 3\lambda + 1}$

iii) Να βρείτε το λ ώστε το τρίγωνο **ΔΕΖ** να έχει το ελάχιστο δυνατό εμβαδόν.

(ΑΠ:λ=1/2)

---

13. Στο διπλανό σχήμα ο κύκλος με κέντρο **Ο** έχει ακτίνα **R=7**, ενώ ο κύκλος με κέντρο **Κ** έχει ακτίνα **ρ=2**. Η απόσταση των σημείων **Γ** και **Δ** είναι **ΓΔ=4.**



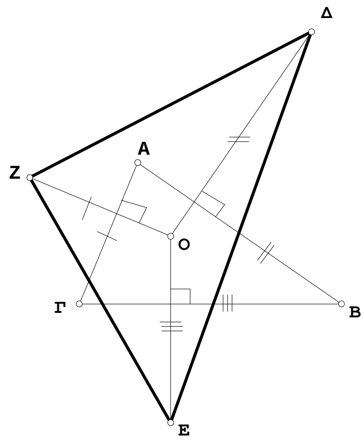
i) Να υπολογίσετε το μήκος του κοινού εφαπτόμενου τμήματος **ΑΒ.**

ii) Να βρείτε το εμβαδόν του τραπεζίου **ΑΒΚΟ.**

iii) Να αποδείξετε ότι: $\boxed{\dfrac{(\mathrm{AO\Gamma})}{(\Delta\mathrm{KB})} = \dfrac{49}{4}}$

---

14. Δίνεται τρίγωνο **ΑΒΓ.** Από ένα εσωτερικό σημείο **Ο** του τριγώνου φέρουμε κάθετες στις πλευρές **ΑΒ,ΒΓ** και **ΓΑ** και πάνω σε αυτές παίρνουμε τμήματα **ΟΔ=ΑΒ, ΟΕ=ΒΓ,** και **ΟΖ=ΓΑ** αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

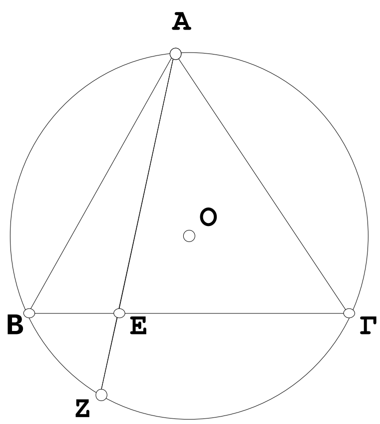


i) $\boxed{(\Delta\mathrm{OE}) = (\mathrm{AB\Gamma})}$

ii) $\boxed{(\Delta\mathrm{EZ}) = 3(\mathrm{AB\Gamma})}$

---

15. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο **ΑΒΓ** πλευράς **α** εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου **Ο.** Στην πλευρά **ΒΓ** θεωρούμε σημείο **Ε** έτσι ώστε $\mathrm{EB} = \dfrac{\alpha}{3}$ και προεκτείνουμε την **ΑΕ** που τέμνει τον κύκλο στο σημείο **Ζ.** Να αποδείξετε ότι:



α) $\boxed{\mathrm{AE} = \dfrac{\alpha\sqrt{7}}{3}}$ **β)** $\boxed{\mathrm{EZ} = \dfrac{2\sqrt{7}\cdot\alpha}{21}}$ **γ)** $\boxed{\dfrac{(\mathrm{AE\Gamma})}{(\mathrm{BEZ})} = 7}$
