ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

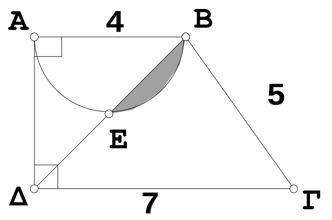
1. Στο διπλανό σχήμα έχουμε το τραπέζιο **ΑΒΓΔ** με **Α=Δ=90°**, **ΑΒ=4,ΒΓ=5,ΔΓ=7** και το ημικύκλιο **ΑΒ**. Να υπολογίσετε:

α. Το εμβαδόν του τραπεζίου.

β. Το μήκος του **ΔΕ**.

γ. Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου κυκλικού τμήματος.

(ΑΠ: α)22 β) $2\sqrt{2}$ γ) $\pi-2$



---

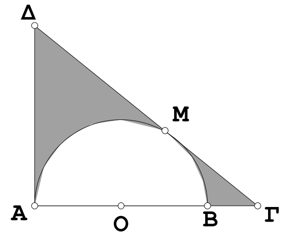
2. Στο διπλανό σχήμα έχουμε ημικύκλιο κύκλου **(Ο,R)**, $ΒΓ=\frac{R}{2}$ και **ΓΔ,ΑΔ** εφαπτόμενες. Να υπολογίσετε συναρτήσει του **R**:

α. Το μήκος του **ΓΜ**

β. Το μήκος του **ΓΔ**

γ. Το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου.

(ΑΠ: α) $\frac{R\sqrt{5}}{2}$ β) $\frac{3R\sqrt{5}}{2}$ γ) $\frac{R^2(5\sqrt{5}-2\pi)}{4}$



---

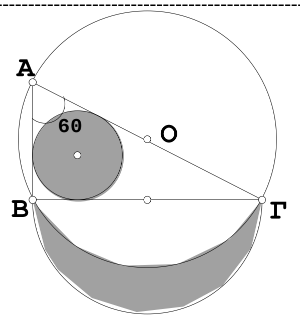
3. Δίνεται τρίγωνο **ΑΒΓ** με $\widehat{A}=60^0$ εγγεγραμμένο σε κύκλο **(Ο,R)** του οποίου η πλευρά **ΑΓ** είναι διάμετρος. Με διάμετρο **ΒΓ** κατασκευάζουμε ημικύκλιο όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να υπολογίσετε συναρτήσει της ακτίνας **R:**

α. Το μήκος των πλευρών **ΒΓ** και **ΑΓ.**

β. Το εμβαδόν του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου **ΑΒΓ.**

γ. Το εμβαδόν του σχηματιζόμενου μηνίσκου.

(ΑΠ: α) $ΒΓ=R\sqrt{3},\ ΑΓ=2R$ β) $\frac{\pi R^2(2-\sqrt{3})}{2}$ γ) $\frac{R^2(5\pi+3\sqrt{3})}{12}$



---

4. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος **(Ο,R)** και τα σημεία του **Α,Β,Γ,** έτσι ώστε το τετράπλευρο **ΟΑΒΓ** να είναι ρόμβος.

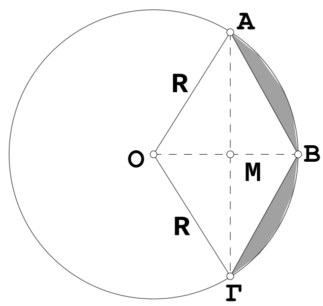
α. Να αποδείξετε ότι **ΑΓ=**$λ_3$, δηλαδή είναι πλευρά ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο **(Ο, R).**

β. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ρόμβου **ΟΑΒΓ** είναι

$$\boxed{(ΟΑΒΓ)=\frac{R^2\sqrt{3}}{2}}$$

γ. Αν **Μ** είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του ρόμβου **ΟΑΒΓ,** τότε να υπολογίσετε, ως συνάρτηση του **R,** τη δύναμη του σημείου **Μ** ως προς τον κύκλο **(Ο, R).**

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μέρους του σχήματος.



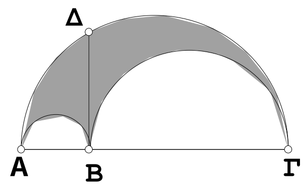
---

5. Στο διπλανό σχήμα **Β** είναι τυχαίο σημείο της διαμέτρου **ΑΓ** του κύκλου **(Ο,R).**

α. Βρείτε τα εμβαδά των τριών ημικυκλικών δίσκων.

β. Δείξτε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου ισούται με το εμβαδόν κυκλικού δίσκου με διάμετρο **ΒΔ.**

γ. Πότε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου γίνεται μέγιστο;



---

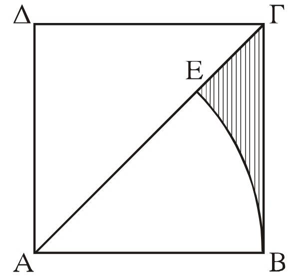
6. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τετράγωνο **ΑΒΓΔ,** του οποίου το μήκος της διαγωνίου **ΑΓ** είναι $6\sqrt{2}$. Με κέντρο την κορυφή **Α** και ακτίνα **ΑΒ** γράφουμε τόξο κύκλου που τέμνει την **ΑΓ** στο σημείο **Ε.** Να βρείτε :

α. το εμβαδόν του τετραγώνου **ΑΒΓΔ**

β. το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{ΒΕ}$

γ. το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $\overset{\frown}{ΑΒΕ}$ και

δ. το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου καμπυλογράμμου τριγώνου **ΕΒΓ.**



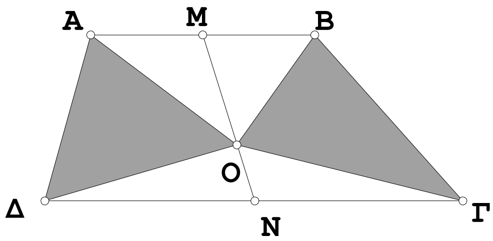
---

7. Δίνεται τραπέζιο **ΑΒΓΔ** με ΑΓ//ΓΔ. Αν **Μ** και **Ν** είναι τα μέσα των βάσεων **ΑΒ, ΓΔ** αντίστοιχα και **Ο** τυχαίο σημείο του τμήματος **ΜΝ,** τότε να αποδείξετε ότι:

α. $\boxed{(\mathrm{AM N\Delta}) = (\mathrm{MB\Gamma N}) = \frac{1}{2}(\mathrm{AB\Gamma\Delta})}$ **β.** $\boxed{(\mathrm{OB\Gamma}) = (\mathrm{OA\Delta})}$

γ. αν το **Ο** είναι το μέσο του τμήματος **ΜΝ,** ισχύει

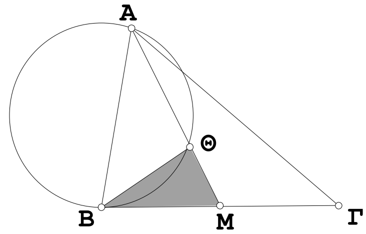
$$\boxed{(\mathrm{AO\Delta}) = \frac{1}{4}(\mathrm{AB\Gamma\Delta})}$$



---

8. Έστω τρίγωνο **ΑΒΓ , ΑΜ** διάμεσος και **Θ** το βαρύκεντρό του. Αν ο περιγεγραμμένος κύκλος στο τρίγωνο **ΑΒΘ** εφάπτεται της **ΒΓ,** να δείξετε ότι:

α. $\boxed{\mu_\alpha = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}}$ **β.** $\boxed{\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2}$ **γ.** $\boxed{(\mathrm{B\Theta M}) = \frac{1}{6}(\mathrm{AB\Gamma})}$



---

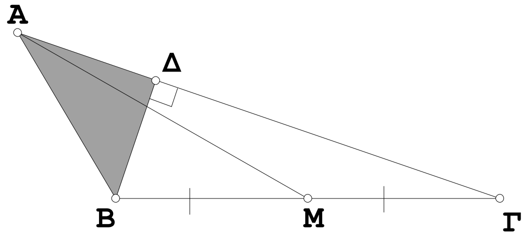
9. Δίνεται τρίγωνο **ΑΒΓ** με $\alpha=2\gamma$ και $\mu_\alpha = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$.

α. Να δείξετε ότι: $\boxed{\beta=\gamma\sqrt{7}}$

β. Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.

γ. Αν $\mathrm{B\Delta}$ ύψος του τριγώνου να δείξετε ότι: $\boxed{\mathrm{A\Delta} = \frac{2\gamma\sqrt{7}}{7}}$.

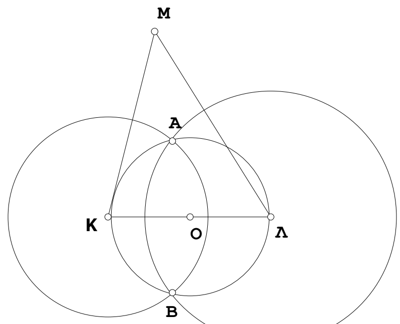
δ. Να δείξετε ότι: $\boxed{(\mathrm{AB\Gamma}) = \sqrt{7}(\mathrm{AB\Delta})}$



---

10. Έστω οι κύκλοι $(\mathrm{K},\mathrm{R}_1)$, (Λ,R_2) και (O,ρ) που διέρχονται από τα σημεία **Α,Β** και **Ο** είναι το μέσον του **ΚΛ.** Αν **Μ** τυχαίο σημείο, εξωτερικό και των τριών κύκλων, να αποδείξετε ότι:

$$\boxed{\Delta^{\mathrm{M}}_{(\mathrm{K},\mathrm{R}_1)} + \Delta^{\mathrm{M}}_{(\Lambda,\mathrm{R}_2)} = 2\Delta^{\mathrm{M}}_{(\mathrm{O},\rho)}}$$



---

11. Δίνεται τρίγωνο **ΑΒΓ** με $\beta=4$, $\gamma=2$ και $\mu_\alpha = \sqrt{3}$.

α. Να δείξετε ότι $\alpha=2\sqrt{7}$

β. Να βρεθεί η γωνία $\widehat{\mathrm{A}}$.

γ. Αν **Δ** σημείο της πλευράς **ΒΓ** ώστε **ΒΔ=2,** να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου **ΑΒΔ.**

---

10. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο **ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ)** με $\widehat{\mathrm{A}} = 20^0$. Θεωρούμε σημείο Δ στην πλευρά **ΑΓ** έτσι ώστε $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{B}}\Delta = 60^0$. Να αποδείξετε ότι:

α. $\boxed{\alpha^2 = \beta \cdot \Delta\Gamma}$ **β.** $\boxed{\mathrm{A\Delta} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta}}$

γ. $\boxed{\alpha^3 + \beta^3 = 3\alpha\beta^2}$