ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1^{o}

Α. Να αποδείξετε ότι αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ίση με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.

(Μονάδες 15)

Β. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα από το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α) Αν δύο χορδές $ΑΒ, ΓΔ$ ενός κύκλου τέμνονται σε ένα εσωτερικό σημείο $Ρ$ του κύκλου τότε:

$$\boxed{ΡΑ \cdot ΡΒ = ΡΓ \cdot ΡΔ}$$

β) Αν ένα πολύγωνο έχει τις γωνίες του ίσες τότε αυτό είναι κανονικό.

γ) Το εμβαδόν ενός τραπεζίου ισούται με το γινόμενο της διαμέσου του επί το ύψος του.

δ) Σε τετράγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) ισχύει ότι: $\boxed{\alpha_4 = R\sqrt{2}}$

ε) Αν σε τρίγωνο $ΑΒΓ$ ισχύει ότι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ τότε $\hat{A} = 90^0$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2^{o}

Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $\alpha=7, \beta=6$ και $\gamma=3$.

α) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.

(Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε την προβολή της πλευράς γ πάνω στην α.

(Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του.

(Μονάδες 9)

Β΄ ΤΑΞΗ

ΘΕΜΑ 3^{o}

Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $\alpha=2\sqrt{3}$, $\beta=2$ και διάμεσο $ΒΜ=3$.

α) Να δείξετε ότι $\gamma=2\sqrt{2}$ και $\hat{A}=90^0$.

(μονάδες 10)

β) Αν $ΑΔ$ είναι ύψος του τριγώνου $ΑΒΓ$ να δείξετε ότι: $ΒΔ=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$.

(μονάδες 7)

γ) Να δείξετε ότι: $(ΒΜΔ)=\dfrac{2}{3}(ΒΜΓ)$

(μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4^{o}

Από σημείο $Α$ εκτός κύκλου (O,R) φέρνουμε τέμνουσα $ΑΒΓ$ έτσι ώστε $ΑΒ=ΒΓ$. Αν $ΟΑ=R\sqrt{7}$:

α) Να δείξετε ότι $Β\hat{Ο}Γ=120^0$

(μονάδες 13)

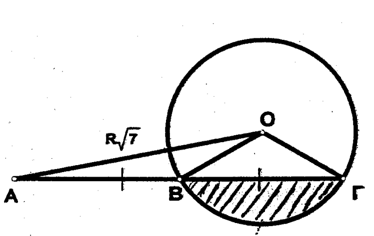
β) Να υπολογίσετε συναρτήσει της ακτίνας R:

i) το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΟΓ$ και

(μονάδες 5)

ii) το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου κυκλικού τμήματος.

(μονάδες 7)



ΑΡΙΣΤΟΣ ΜΕΛΕΤΟΠΟΥΛΟΣ

ΘΕΜΑ 1ο

(Α) Έστω τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' με $\hat{A}=\hat{A}'$.

Τότε θα έχουμε:

$$\left.\begin{aligned}(AB\Gamma) &= \beta\gamma\cdot\eta\mu A\\ (A'B'\Gamma') &= \beta'\gamma'\cdot\eta\mu A'\end{aligned}\right\} \Longrightarrow \frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \frac{\beta\gamma\cdot\cancel{\eta\mu A}}{\beta'\gamma'\cdot\cancel{\eta\mu A'}} = \frac{\beta\gamma}{\beta'\gamma'}$$

ο.ε.δ.

(Β) Σ, Λ, Σ, Λ, Σ

ΘΕΜΑ 2ο

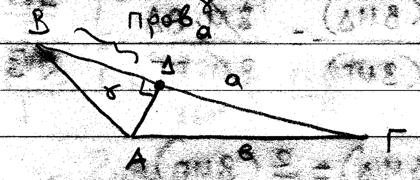
α) Η μεγαλύτερη πλευρά είναι η α.

$$\left.\begin{aligned}a^2 &= 7^2 = 49\\ \beta^2+\gamma^2 &= 6^2+3^2 = 36+9 = 45\end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha^2 > \beta^2+\gamma^2 \Rightarrow \hat{A} > 90^\circ$$

Επομένως το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.

β) $\beta^2 = a^2+\gamma^2 - 2a\cdot\overbrace{\pi\rho o\beta_a \gamma}^{B\Delta} \Longrightarrow$

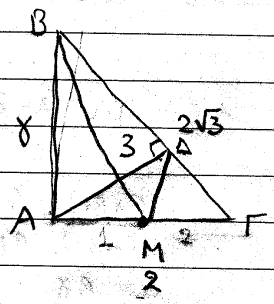
$$\pi\rho o\beta_a \gamma = \frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2a} = \frac{49+9-36}{2\cdot 7} = \frac{22}{14} = \frac{11}{7}$$



γ) $\tau = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = \frac{7+6+3}{2} = 8$, $\tau-a = 8-7 = 1$, $\tau-\beta = 8-6 = 2$, $\tau-\gamma = 8-3 = 5$

Άρα $E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} = \sqrt{8\cdot 1\cdot 2\cdot 5} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ τ.μ.

ΘΕΜΑ 3ο.



α) Από 1ο Θ. διαμέσων στο ΑΒΓ έχουμε:

$$AB^2+B\Gamma^2 = 2BM^2 + \frac{A\Gamma^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\gamma^2+(2\sqrt{3})^2 = 2\cdot 3^2 + \frac{2^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \gamma^2 = 8 \Leftrightarrow \boxed{\gamma = 2\sqrt{2}}$$

Οι πλευρές του ΑΒΓ είναι:
$\alpha = 2\sqrt{3}$, $\beta = 2$ και $\gamma = 2\sqrt{2}$. Η μεγαλύτερη πλευρά είναι η α.

$\alpha^2 = (2\sqrt{3})^2 = 12$, $\beta^2+\gamma^2 = 4+8 = 12$. Άρα
$\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2 \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$ (Αντ. Πυθ. Θεωρήματος).

β) $\left.\begin{array}{l}\hat{A}=90^\circ \\ A\Delta: \text{ύψος}\end{array}\right\} \Rightarrow AB^2 = B\Gamma\cdot B\Delta \Rightarrow B\Delta = \frac{AB^2}{B\Gamma} = \frac{(2\sqrt{2})^2}{(2\sqrt{3})} =$

$$= \frac{8}{2\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

γ) Τα τρίγωνα έχουν κοινή τη γωνία $M\hat{B}\Delta$. Άρα θα ισχύει ότι:

$$\frac{(BM\Delta)}{(BM\Gamma)} = \frac{\cancel{BM}\cdot B\Delta}{\cancel{BM}\cdot B\Gamma} = \frac{\frac{4\sqrt{3}}{3}}{\frac{2\sqrt{3}}{1}} = \frac{4\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = \frac{2}{3}$$

Επομένως $(BM\Delta) = \frac{2}{3}(BM\Gamma)$

ΘΕΜΑ 4ο.

α) $AB \cdot B\Gamma = A\Delta^2 - R^2$ (μετρικές σχ. στον κύκλο).

Έστω $B\Gamma = x$

$\Leftrightarrow \; x \cdot 2x = (R\sqrt{7})^2 - R^2 \Leftrightarrow$

$2x^2 = 7R^2 - R^2 \Leftrightarrow$

$x^2 = 3R^2 \Leftrightarrow x = R\sqrt{3} = \lambda_3$

Άρα $B\hat{O}\Gamma = \frac{180}{3} = 120°$.

(Αυτό αποδεικνύεται και με το Θεώρημα των διαμέσων στο ΟΑΓ, αλλά δεν έχω χρόνο να το λύσω γιατί με περιμένουν τα παιδιά για να πάμε για μπάνιο στο Καλαμάκι)

β) i) $(AO\Gamma) = 2(BO\Gamma) = 2 \cdot \frac{1}{2} R \cdot R \cdot \eta\mu 120° = R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}$

Επειδή ΟΒ διάμεσος

ii) Βρίσκουμε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $O\overset{\frown}{B\Gamma}$.

$(O\overset{\frown}{B\Gamma}) = \pi R^2 \frac{120}{360°} = \frac{\pi R^2}{3}$ και $(BO\Gamma) = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με:

$$E = (O\overset{\frown}{B\Gamma}) - (OB\Gamma) = \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = \frac{R^2}{12}(4\pi - 3\sqrt{3})$$

ΚΑΛΟ ΚΑΛΟΚΑΙΡΙ!!