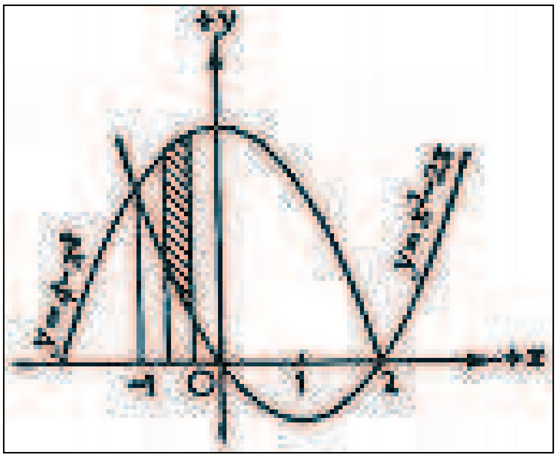
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ-ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

2000-2010



ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΠΑΠΠΑΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
2^{O} ΓΕΛ ΥΜΗΤΤΟΥ
ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2010

Δ΄ ΤΑΞΗ

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2000
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
(ΚΑΙ ΤΩΝ ΔΥΟ ΚΥΚΛΩΝ)
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \alpha + \beta i$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Στη στήλη Ι του επόμενου πίνακα δίνονται ορισμένα σύμβολα και παραστάσεις που έχουν σχέση με το μιγαδικό αριθμό z. Κάθε ένα από αυτά είναι ίσο με μία μόνο από τις εκφράσεις που δίνονται στη στήλη ΙΙ

ΣΤΗΛΗ Ι	ΣΤΗΛΗ ΙΙ
Α. $\mathrm{Re}(z)$	**1.** $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$
Β. $\lvert z\rvert$	**2.** β
Γ. $\bar{z}$	**3.** βi
Δ. $z\,\bar{z}$	**4.** $\alpha - \beta i$
Ε. $z + \bar{z}$	**5.** $\alpha^2 + \beta^2$
ΣΤ. $z - \bar{z}$	**6.** α
Ζ. $\mathrm{Im}(z)$	**7.** 2α
	8. $2\beta i$
	9. $-\alpha + \beta i$

Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της πρώτης στήλης και, δίπλα ακριβώς, τον αριθμό της δεύτερης στήλης που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μονάδες 14

Β. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός z = 3-4i. Να βρείτε :

α) το πραγματικό μέρος Re(z) και το φανταστικό μέρος Im(z) του μιγαδικού αριθμού z

Μονάδες 3

β) τον συζυγή $\bar{z}$ του μιγαδικού αριθμού z

Μονάδες 4

γ) το μέτρο $|z|$ του μιγαδικού αριθμού z.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

α) Να δείξετε ότι ισχύει $A^2 = 2A - I$.

Μονάδες 9

β) Να δείξετε ότι ισχύει $A\,(2I - A) = I$.

Μονάδες 8

γ) Να βρείτε τον πίνακα X ώστε να ισχύει $2X - I = A^2$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

α) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

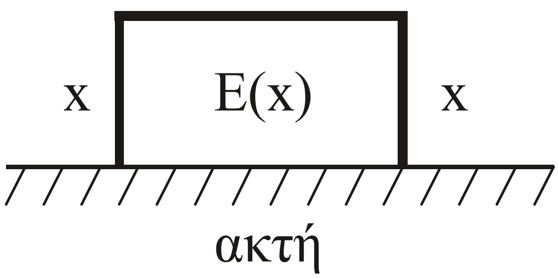
Μονάδες 12

β) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f .

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 4ο

Ένας ιχθυοκαλλιεργητής πήρε άδεια να χρησιμοποιήσει μία θαλάσσια περιοχή σχήματος ορθογωνίου την οποία θα περιφράξει με δίχτυ μήκους 600 μέτρων. Μόνο οι τρεις από τις τέσσερις πλευρές πρόκειται να περιφραχτούν με δίχτυ, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E(x) της θαλάσσιας περιοχής που θα χρησιμοποιηθεί δίνεται από τον τύπο

$$E(x) = -2x^2 + 600x$$

(υποθέτουμε ότι $0 < x < 300$).

Μονάδες 6

β) Να υπολογίσετε την τιμή του x έτσι ώστε το εμβαδόν E(x) της περιοχής να γίνει μέγιστο.

Μονάδες 14

γ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού.

Μονάδες 5

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 25 ΜΑΪΟΥ 2001
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. α) Αν $z_1 = \varrho_1(\sigma\upsilon\nu\,\theta_1 + i\,\eta\mu\theta_1)$ και $z_2 = \varrho_2(\sigma\upsilon\nu\,\theta_2 + i\,\eta\mu\theta_2)$ είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί σε τριγωνομετρική μορφή, να αποδείξετε ότι:

$$z_1 \cdot z_2 = \varrho_1 \varrho_2 [\sigma\upsilon\nu\,(\theta_1+\theta_2) + i\,\eta\mu\,(\theta_1+\theta_2)]$$

Μονάδες 6,5

β) Αν $z = \alpha + \beta i$ με $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, είναι ένας μιγαδικός αριθμός, να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης Ι** του επόμενου πίνακα, και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης ΙΙ** που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη Ι	Στήλη ΙΙ
Α. $Re(z)$	**1.** $-\alpha - \beta i$
Β. $Im(z)$	**2.** $\alpha - \beta i$
Γ. $-z$	**3.** $\alpha + \beta$
Δ. $\bar{z}$	**4.** α
Ε. $\lvert z \rvert$	**5.** $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$
ΣΤ. $z \cdot \bar{z}$	**6.** $\alpha^2 + \beta^2$
	7. β

Μονάδες 6

Β. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = 1 + i$ και $z_2 = i$.

α) Να γράψετε τους z_1 και z_2 σε τριγωνομετρική μορφή.

Μονάδες 8

β) Να βρείτε την τριγωνομετρική μορφή του γινομένου $z_1 \cdot z_2$.

Μονάδες 4,5

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 3,\ x \in \mathbf{R}$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x΄x και y΄y.

Μονάδες 7

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A\left(3, f(3)\right)$.

Μονάδες 9

γ) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, για την οποία ισχύει

$$2 - x^4 \leq f(x) \leq 2 + x^4, \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $f(0) = 2$

Μονάδες 6

β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$.

Μονάδες 9

γ) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Ένα τουριστικό λεωφορείο έχει να διανύσει απόσταση 625 km με σταθερή ταχύτητα x km την ώρα. Σύμφωνα με τον Κώδικα Οδικής Κυκλοφορίας το μέγιστο όριο ταχύτητας είναι 90 km την ώρα. Τα καύσιμα κοστίζουν 160 δραχμές το λίτρο, η ωριαία κατανάλωση είναι $\left(5{,}5+\dfrac{x^2}{200}\right)$ λίτρα και η αμοιβή του οδηγού είναι 2000 δραχμές την ώρα.

α) Να αποδείξετε ότι το συνολικό κόστος $K(x)$ της διαδρομής είναι:

$$K(x)=\frac{1800000}{x}+500x\,,\quad 0<x\le 90\,.$$

Μονάδες 12

β) Να βρείτε την ταχύτητα του λεωφορείου για την οποία το κόστος της διαδρομής γίνεται ελάχιστο.

Μονάδες 13

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους υποψηφίους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Δ΄ ΤΑΞΗ

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 5 ΙΟΥΝΙΟΥ 2002
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ(4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_o, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f+g είναι παραγωγίσιμη στο x_o και ισχύει:

$$(f+g)'(x_o) = f'(x_o)+g'(x_o)$$

Μονάδες 9

Β. *Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη **Σ**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λ**, αν αυτή είναι λανθασμένη.*

1. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_o , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 2

2. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_o , τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Μονάδες 2

3. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) = 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

Μονάδες 2

4. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

Μονάδες 2

5. Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_o, τότε ισχύει:

$$\lim_{x\to x_o}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to x_o} f(x)+\lim_{x\to x_o} g(x)$$

Μονάδες 2

6. Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_o, τότε ισχύει:

$$\lim_{x\to x_o}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\lim_{x\to x_o} f(x)-\lim_{x\to x_o} g(x)$$

Μονάδες 2

7. Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z=\alpha+\beta i$ ισχύει :

$$|z|=\alpha^2+\beta^2$$

Μονάδες 2

8. Για το μιγαδικό αριθμό i ισχύει : $i^4 = 1$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z_1 = -1+i$, $z_2 = 3-4i$

α. Να υπολογίσετε το μιγαδικό αριθμό z_1+5z_2

Μονάδες 6

β. Να υπολογίσετε το μιγαδικό αριθμό $\dfrac{z_2}{\bar{z}_1}$

Μονάδες 6

γ. Να αποδείξετε ότι το πρωτεύον όρισμα του μιγαδικού αριθμού z_1 είναι: $Arg(z_1) = \frac{3\pi}{4}$

Μονάδες 6

δ. Να υπολογίσετε το μιγαδικό αριθμό z_1^8 .

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

Μονάδες 10

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(-1, f(-1))$.

Μονάδες 5

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα (0 , 1) .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 4x}{x-2} & , \text{ αν } x < 2 \\ -x^2 + k & , \text{ αν } x \geq 2 \end{cases}$

όπου $k \in \mathbb{R}$. Να βρείτε :

α. το k, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$,

Μονάδες 7

β. το όριο $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$,

Μονάδες 5

γ. το ρυθμό μεταβολής της f στο $x_0 = 4$ και

Μονάδες 5

δ. την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \dfrac{f(x)}{x+3}$ στο $-\infty$.

Μονάδες 8

Δ΄ ΤΑΞΗ

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2003
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω η συνάρτηση f(x) = εφx.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $R_1 = \mathbb{R} - \{x \mid συνx = 0\}$ και ισχύει

$$f'(x) = \frac{1}{συν^2 x}.$$

Μονάδες 10

Β. *Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη* ***(Σ)****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***(Λ)****, αν αυτή είναι λανθασμένη.*

1. Το μέτρο του μιγαδικού αριθμού z = x + yi, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί, δίνεται από τον τύπο $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2. Αν δύο μεταβλητά μεγέθη x, y συνδέονται με τη σχέση y = f(x), όταν f είναι μία παραγωγίσιμη συνάρτηση στο x_0, τότε ονομάζουμε ρυθμό μεταβολής του y ως προς το x στο σημείο x_0 την παράγωγο $f'(x_0)$.

3. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f.

4. Ο συζυγής κάθε μιγαδικού αριθμού $z = x + yi$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί, είναι ο μιγαδικός $\bar{z} = -x + yi$.

5. Αν υπάρχουν τα όρια των συναρτήσεων f και g στο x_0, τότε ισχύει

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}\ ,\ \text{εφόσον}\quad \lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0\ .$$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2 - 3x}{x - 2}$, $x \in \mathbb{R} - \{2\}$.

α. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$.

Μονάδες 7

β. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

Μονάδες 8

γ. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{αν } x<5 \\ 10x-25, & \text{αν } x\geq 5 \end{cases}$$

και το σημείο $x_0 = 5$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 5$.

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι η f παραγωγίζεται στο $x_0 = 5$ και να βρείτε την $f'(5)$.

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(5,\ f(5))$.

Μονάδες 4

δ. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f .

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί $z = x + yi$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί και $w=\dfrac{i\,(i+z)}{i-z}$ με $z \neq i$.

Να αποδείξετε ότι :

α. $$w=\frac{2x}{x^2+(y-1)^2}+\frac{1-x^2-y^2}{x^2+(y-1)^2}\,i\ ,$$

Μονάδες 8

β. αν ο w είναι πραγματικός αριθμός, τότε η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο κέντρου Ο(0 , 0) και ακτίνας $\rho_1 = 1$ και

Μονάδες 8

γ. αν ο z είναι πραγματικός αριθμός, τότε η εικόνα του w ανήκει σε κύκλο κέντρου Ο(0 , 0) και ακτίνας $\rho_2 = 1$.

Μονάδες 9

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους υποψηφίους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν.

   Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση.

   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Αν $\alpha + \beta i$, $\gamma+\delta i$ είναι μιγαδικοί αριθμοί, όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ και $\gamma+\delta i \neq 0$, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i} = \frac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2} + \frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}\, i$$

Μονάδες 9

Β. *Στον παρακάτω πίνακα, κάθε μιγαδικός αριθμός της* ***Στήλης Ι*** *είναι ίσος με ένα μόνο αριθμό της* ***Στήλης ΙΙ*** *(δύο αριθμοί στη* ***Στήλη ΙΙ*** *περισσεύουν).*

Στήλη Ι	**Στήλη ΙΙ**
Α. i^1	**1.** $-i$
Β. i^2	**2.** $+1$
Γ. i^3	**3.** i
Δ. i^4	**4.** -1
	5. 0
	6. 4

Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της **Στήλης Ι** του παραπάνω πίνακα και ακριβώς δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης ΙΙ**, ώστε να δημιουργείται η σωστή αντιστοιχία.

Μονάδες 4

*Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις **Γ, Δ, Ε και ΣΤ,** να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη **(Σ)**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **(Λ)**, αν αυτή είναι λανθασμένη.*

Γ. Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει: $f(x) = g(x) + c$.

Μονάδες 3

Δ. Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε x_1 , $x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$.

Μονάδες 3

Ε. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$.

Μονάδες 3

ΣΤ. Ο συντελεστής διεύθυνσης, λ, της εφαπτομένης στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$, της γραφικής παράστασης C_f μιας συνάρτησης f, παραγωγίσιμης στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι $\lambda = f'(x_0)$.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση, $f(x) = \begin{cases} 4x^2 + 3, & x < 1 \\ 6x + k, & x \geq 1 \end{cases}$, όπου $k \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε την τιμή του k, ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Μονάδες 10

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α(–1, f(–1)).

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ, ώστε να ισχύει:

$$\mu \cdot f'(-5) + f'(5) + 34 = 0.$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6\alpha x + \beta$, όπου $x \in \mathbb{R}$ και α, β πραγματικοί αριθμοί. Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = -2$ και είναι $f(-2) = 98$.

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -6$ και $\beta = 54$.

Μονάδες 6

β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 9

γ. Να καθορίσετε το είδος των ακροτάτων της συνάρτησης f.

Μονάδες 4

δ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα (–1, 2).

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = x + yi$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί, για τους οποίους υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει:

$$\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 i = \alpha + (1-\alpha)i \ .$$

Να αποδείξετε ότι:

α. αν Im(z) = 0, τότε α = 1.

Μονάδες 5

β. αν α = 0, τότε $z^2 + 1 = 0$.

Μονάδες 5

γ. για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει: $0 \le \alpha \le 1$.

Μονάδες 7

δ. οι εικόνες Μ των μιγαδικών αυτών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν σε κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν.

   Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση.

   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Δ΄ ΤΑΞΗ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 7 ΙΟΥΛΙΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Αν $z_1 = \alpha + \beta i$ και $z_2 = \gamma + \delta i$, όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, είναι μιγαδικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

Μονάδες 10

*Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις **Β, Γ, Δ, Ε** και **ΣΤ,** να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη (**Σ**), αν η πρόταση είναι σωστή ή (**Λ**), αν αυτή είναι λανθασμένη.*

Β. Αν $M_1(\alpha , \beta)$ και $M_2(\gamma , \delta)$ είναι οι εικόνες των $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ αντιστοίχως στο μιγαδικό επίπεδο, τότε η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

Μονάδες 3

Γ. Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z = \alpha + \beta i$, όπου $\alpha , \beta \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$\overline{z} = -\alpha + \beta i .$$

Μονάδες 3

Δ. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$, όπου $x \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x) = -\eta\mu x$.

Μονάδες 3

Ε. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 3

ΣΤ. Έστω μία συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)= \sqrt{4x^2+1} + 2x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

α) Να αποδείξετε ότι :

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)-1}{x} = 2$,

Μονάδες 10

ii) $f'(0)=2f(0)$.

Μονάδες 5

β) Να υπολογίσετε το: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\alpha x^2+\beta x+3}{x-2}$, $x \in \mathbb{R}-\{2\}$, όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί. Η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(1,-4)$ και ισχύει η σχέση $f(3) + 3f(1) = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 0$.

Μονάδες 9

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της Α (1,−4) .

Μονάδες 8

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x + 2$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = x + yi$, όπου x, y πραγματικοί αριθμοί, για τους οποίους υπάρχει $k \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει:

$$x = 3-k \quad \textit{και} \quad y = 2k+1 .$$

Να αποδείξετε ότι:

α) αν $3\,\mathrm{Re}(z) + 4\,\mathrm{Im}(z) = 3$, τότε $k = -2$.

Μονάδες 9

β) αν $|z-1| = \sqrt{5}$, τότε $|z| = \sqrt{10}$.

Μονάδες 10

γ) οι εικόνες Μ των μιγαδικών αυτών αριθμών z στο μιγαδικό επίπεδο ανήκουν σε ευθεία, της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν.

Δ΄ ΤΑΞΗ

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΕΤΑΡΤΗ 8 ΙΟΥΝΙΟΥ 2005

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α.

1. Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_o, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 12

2. Έστω M(x,y) η εικόνα του μιγαδικού αριθμού $z = x+yi$ στο μιγαδικό επίπεδο.

Τι ορίζουμε ως μέτρο του z;

Μονάδες 3

Β. *Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη (**Σ**), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (**Λ**), αν αυτή είναι λανθασμένη.*

1. Μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε x_1 , $x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\text{αν } x_1 \neq x_2, \text{ τότε } f(x_1) \neq f(x_2).$$

Μονάδες 2

2. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_o \in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_o)$, όταν

$$f(x) < f(x_o) \text{ για κάθε } x \in A.$$

Μονάδες 2

3. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_o και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_o, τότε

$$\lim_{x \to x_o} f(x) > \lim_{x \to x_o} g(x).$$

Μονάδες 2

4. Αν z_1 και z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε

$$\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}.$$

Μονάδες 2

5. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β] και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β) τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}.$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί:

$$z = \lambda^2 - 2 + (3-2\lambda)i, \ \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad w = k+4i, \ k > 0.$$

Για τους z, w ισχύουν:

$$Re(z) + Im(z) = 0 \quad \text{και} \quad |w| = 5.$$

α. Να αποδείξετε ότι $z = -1+i$.

Μονάδες 8

β. Να αποδείξετε ότι $k = 3$.

Μονάδες 8

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\mu \in \mathbb{R}$, για το οποίο ισχύει $z + \mu\overline{z} = 3i - w$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3+kx^2+3x-2$, $x\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1,1)$. Να αποδείξετε ότι:

α. $k = -1$.

Μονάδες 5

β. Η συνάρτηση f δεν έχει τοπικά ακρότατα.

Μονάδες 10

γ. Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{(2-\alpha)x^2 - kx + 2}{x-3}$$ με $\alpha, k\in\mathbb{R}$ και $x \neq 3$.

α. Αν η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$, τότε να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $k = 3$.

Μονάδες 10

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $\xi\in(1, 2)$, στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_o = 1$.

Μονάδες 7

Δ΄ ΤΑΞΗ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 8 ΙΟΥΛΙΟΥ 2005
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α.

1. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η f είναι συνεχής στο Δ και $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 12

2. Έστω Α ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α;

Μονάδες 3

Β. *Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη **(Σ)**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **(Λ)**, αν αυτή είναι λανθασμένη.*

1. Αν $z = x+yi$, με $x, y \in \mathbb{R}$, τότε: $|\bar{z}| = |-z|$.

Μονάδες 2

2. Αν $z = \alpha+\beta i$, τότε: $z + \bar{z} = \alpha$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 2

3. Αν $x \neq 0$, τότε ισχύει $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = -\infty$.

Μονάδες 2

4. Έστω η συνάρτηση $f(x) = εφx$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x \mid συνx = 0\}$ και ισχύει: $f'(x) = \dfrac{1}{συν^2 x}$.

Μονάδες 2

5. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε: $\lim\limits_{x\to x_0}\big(k\,f(x)\big) = k\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)\big)$, για κάθε σταθερά $k \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z = \dfrac{x+3i}{2-i}$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε το x, ώστε ο αριθμός z να είναι φανταστικός.

Μονάδες 10

β. Αν $x = -6$, να αποδείξετε ότι ο z είναι πραγματικός αριθμός.

Μονάδες 6

γ. Αν $x = 4$, να βρείτε το $|\bar{z}|$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^3+1 & , \ x<1 \\ x^4-1 & , \ x \geq 1 \end{cases}$.

α. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη συνέχεια.

Μονάδες 6

β. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f.

Μονάδες 10

γ. Να εξετάσετε, αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[-1,2]$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{kx - x^2}{4}$, $x \in \mathbb{R}$, της οποίας η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο O(0,0) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 1$.

α. Να αποδείξετε ότι $k = 4$.

Μονάδες 7

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ολικό μέγιστο, το οποίο και να βρείτε.

Μονάδες 8

γ. Να αποδείξετε ότι στο διάστημα (2,4) υπάρχει μοναδικό σημείο ξ, στο οποίο η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f είναι παράλληλη στην ευθεία AB, όπου A(2, f(2)) και B(4, f(4)).

Μονάδες 10

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα **δεν θα τα αντιγράψετε** στο τετράδιο.

2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας δοθούν.
Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση.

Δ΄ ΤΑΞΗ

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 31 ΜΑΪΟΥ 2006
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε να δείξετε ότι:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| .$$

Μονάδες 7

Β. *Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη **Σ**, αν η πρόταση είναι **Σωστή**, ή **Λ**, αν αυτή είναι **Λανθασμένη**.*

1. Έστω f πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Δ και $x_o \in \Delta$. Έστω επίσης $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

Αν $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = +\infty$ τότε $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{1}{f(x)} = -\infty$.

Μονάδες 3

2. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί. Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες Μ(α,β) και Μ΄(α,-β) των συζυγών μιγαδικών $z=\alpha+\beta i$ και $\overline{z} = \alpha - \beta i$ είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.

Μονάδες 3

3. Αν μια πραγματική συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_o, τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_o.

Μονάδες 3

4. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ με πεδίο ορισμού Δ = [0, +∞), τότε $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ για κάθε x ∈ (0, +∞).

Μονάδες 3

5. Αν ένα τουλάχιστον από τα όρια $\lim\limits_{x\to x_o^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_o^-} f(x)$ είναι +∞ ή −∞, τότε η ευθεία $x=x_o$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

Μονάδες 3

6. Έστω δύο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν

- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε x∈Δ ισχύει:

$$f(x) = g(x) + c\ .$$

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - 4x + 13 = 0 \quad (1)$$

α. Να λυθεί στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών η εξίσωση (1).

Μονάδες 9

β. Αν z_1, z_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1), τότε να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης $A=|z_1|^2-2|z_1\cdot z_2|+\sqrt{13}\,|\overline{z}_2|+i^{2006}$.

Μονάδες 9

γ. Αν $z_1 = 2+3i$, τότε να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει:

$$|z - z_1| = 5.$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{3}{4}x + \lambda, & x \le 1 \\ \dfrac{x^2 - 8x + 4}{4x}, & x > 1 \end{cases}$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ι. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_o = 1$.

Μονάδες 10

ΙΙ. Για $\lambda=0$

α. να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 7

β. να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Για $k \in \mathbb{R}$ δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = 2x^3 - kx^2 + 10, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Ι. Να βρεθεί η τιμή του $k \in \mathbb{R}$ για την οποία η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο Α (1, f(1)) είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

Μονάδες 5

ΙΙ. Για k = 3

α. να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 8

β. να βρείτε το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $(-\infty, 0]$.

Μονάδες 5

γ. και για κάθε $\alpha \in (14,15)$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \alpha - 5$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(0,1)$.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν.
   Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση.
   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα**.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Δ΄ ΤΑΞΗ

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 30 ΜΑΪΟΥ 2007
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. 1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}-\{0,1\}$.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=\nu\cdot x^{\nu-1}$.

Μονάδες 10

2. Να ορίσετε πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 5

Β. *Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη **Σ**, αν η πρόταση είναι **Σωστή**, ή **Λ**, αν αυτή είναι **Λανθασμένη**.*

1. Για κάθε μιγαδικό z ισχύει $|z|=z\cdot\bar{z}$.

Μονάδες 2

2. Μια συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία (παράλληλη στον xx΄) τέμνει τη γραφική παράστασή της το πολύ σε ένα σημείο.

Μονάδες 2

3. Αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης f στο $x_0\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<0$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0.

Μονάδες 2

4. Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο [α,β], τότε η f παίρνει στο [α,β] μια μέγιστη τιμή Μ και μια ελάχιστη τιμή m.

Μονάδες 2

5. Έστω η συνάρτηση f(x)=ημx με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, τότε $f'(x)=-$συνx, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z=(λ-2)+2λi, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z.

Μονάδες 9

β. Αν ισχύει $z+\bar{z}=2$, να βρείτε το $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)$.

Μονάδες 7

γ. Αν $|z|=2$ και Im(z)≠0, να βρείτε το λ.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{4}{x}$, με x>0.

α. Να βρείτε τα όρια

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}$ **ii)** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x f(x)}{(x-2)^2}$

Μονάδες 8

β. Να βρείτε το σημείο Μ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που απέχει από το σημείο Ο(0,0) τη μικρότερη απόσταση.

Μονάδες 9

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία $y=-2x+6$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Αν για κάθε $x\neq 0$ ισχύει $xf(x)=x+2ημx$, τότε:

α. Να βρείτε το $f(0)$.

Μονάδες 7

β. Να αποδείξετε ότι $f(x)<3$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Μονάδες 10

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Δεν θα αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση.
   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.

Δ΄ ΤΑΞΗ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΤΕΤΑΡΤΗ 4 ΙΟΥΛΙΟΥ 2007 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. 1. Να αποδείξετε ότι: αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

Μονάδες 12

2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Μονάδες 5

Β. *Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη* ***Σ****, αν η πρόταση είναι* ***Σωστή****, ή* ***Λ****, αν αυτή είναι* ***Λανθασμένη****.*

1. Για δύο οποιουσδήποτε μιγαδικούς αριθμούς $α+βi$ και $γ+δi$ η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματός τους ισούται με τη διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

Μονάδες 2

2. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της f.

Μονάδες 2

3. Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h\circ(g\circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h\circ g)\circ f$ και ισχύει $h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f$.

Μονάδες 2

4. Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 έχουν ασύμπτωτες.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει $|z-1+i|=|iz|$.

α. **i)** Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων Μ των μιγαδικών z.

Μονάδες 10

ii) Να βρείτε ποια από τα σημεία Μ απέχουν από την αρχή Ο(0,0) απόσταση ίση με $\sqrt{5}$.

Μονάδες 10

β. Αν Re(z)=0, τότε να δείξετε ότι z=−i.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{2}, & x<2 \\ \frac{x^2-5x+6}{2(x-1)}, & x \geq 2 \end{cases}$.

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x_0=2$.

Μονάδες 12

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο Μ (0,f(0)).

Μονάδες 6

γ. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=\frac{1}{2}x-2$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται μια συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f^3(x)+f(x)=8x^3-12x^2+8x-2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1.

Μονάδες 8

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει μια μόνο ρίζα στο (0, 1).

Μονάδες 9

γ. Αν για τη συνάρτηση g: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f\big(g(x)-3x\big)=f(x^2+2)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να βρείτε το x_0 στο οποίο η g παρουσιάζει ελάχιστο. **Μονάδες 8**

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ</u>

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). <u>Δεν θα αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο</u>.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν.
   <u>Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση.</u>
   Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε <u>στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα</u>.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΤΕΤΑΡΤΗ 28 ΜΑΪΟΥ 2008 ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. 1. Αν $z_1 = α + βi$ και $z_2 = γ + δi$ είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί, να αποδείξετε ότι $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

Μονάδες 7

2. Έστω f μια συνάρτηση και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0;

Μονάδες 6

Β. *Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη **Σ**, αν η πρόταση είναι **Σωστή**, ή **Λ**, αν αυτή είναι **Λανθασμένη**.*

1. Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει: $|z_1 + z_2| > |z_1| + |z_2|$.

Μονάδες 3

2. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $(ημx)' = -συνx$.

Μονάδες 3

3. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε αυτή ή είναι θετική για κάθε $x \in Δ$ ή είναι αρνητική για κάθε $x \in Δ$, δηλαδή διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

Μονάδες 3

4. Αν μια συνάρτηση f είναι

- · συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β]
- · παραγωγίσιμη στο ανοιχτό διάστημα (α, β) και
- · $f(\alpha) = f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = 0$.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η εξίσωση $3z^2 + \lambda z + \mu = 0$,
όπου λ, μ είναι πραγματικοί αριθμοί.

Α. Αν ο αριθμός $z_1 = 1 + i$ είναι ρίζα της εξίσωσης, να αποδείξετε ότι $\lambda = -6$, $\mu = 6$ και να βρείτε τη δεύτερη ρίζα z_2 της εξίσωσης.

Μονάδες 14

Β. Να αποδείξετε ότι:

α. $z_1^2 + z_2^2 = 0$

Μονάδες 6

β. $z_1^{2008} + z_2^{2008} = 2^{1005}$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} 1-x & , \quad x \le 1 \\ (x-1)^2 & , \quad x > 1 \end{cases}$

Α. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι:

α. συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$

Μονάδες 8

β. παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$.

Μονάδες 10

Β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της Α(2, 1).

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + k}{x}$,

όπου k είναι πραγματικός αριθμός.

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

Μονάδες 3

Β. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(1,\ f(1))$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$, να βρείτε την τιμή του k.

Μονάδες 8

Γ. Για k = 1,

α. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Μονάδες 8

β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία στο διάστημα $[1, +\infty)$.

Μονάδες 6

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ ΠΡΟΣ ΤΟΥΣ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥΣ</u>

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **<u>Δεν θα αντιγράψετε</u>** τα θέματα στο τετράδιο.

Δ΄ ΤΑΞΗ

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 26 ΜΑΪΟΥ 2009
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. 1. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

Μονάδες 5

2. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Μονάδες 8

Β. *Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη **Σ**, αν η πρόταση είναι **Σωστή**, ή **Λ**, αν αυτή είναι **Λανθασμένη**.*

1. $|z|^2 = z^2$, για κάθε μιγαδικό αριθμό z .

Μονάδες 3

2. Η εικόνα του μιγαδικού αριθμού α+βi, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι το σημείο Μ(α,β).

Μονάδες 3

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\eta\mu x}{x} = 0.$

Μονάδες 3

4. Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β] και παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α,β), τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}.$$

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί

$$z_1=2+3i \quad \text{και} \quad z_2=(1-i)^2+3i^{2009}+1.$$

α. Να αποδείξετε ότι $z_2=1+i$.

Μονάδες 8

β. Να βρείτε το μέτρο του μιγαδικού αριθμού $\bar{z}_1-z_2$.

Μονάδες 7

γ. Να εκφράσετε το πηλίκο $\frac{z_1}{z_2}$ στη μορφή κ+λi, όπου

κ, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\alpha x^2+\beta, & x\le 1\\ 2x+3\ , & x>1\end{cases}$ με α, $\beta\in\mathbb{R}$.

α. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=1$, να αποδείξετε ότι $\alpha+\beta=5$.

Μονάδες 5

β. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 4$.

Μονάδες 10

γ. Για $\alpha = 1$ και $\beta = 4$, να προσδιορίσετε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, $x \neq 0$, στο $-\infty$ και στο $+\infty$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Για $\lambda \in \mathbb{R}$ δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^3 + \lambda x^2 - 3x + 1,\ x \in \mathbb{R}.$$

I. Αν η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$, να βρείτε την τιμή του λ.

Μονάδες 4

II. Για $\lambda = 0$

α. να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 8

β. να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλες προς την ευθεία $y = 9x$.

Μονάδες 8

γ. να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) - \sqrt{x} = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο ανοικτό διάστημα $(0,1)$.

Μονάδες 5

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑΣ Β΄)
ΤΡΙΤΗ 25 ΜΑΪΟΥ 2010
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ’ ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 10

Α2. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σ’ ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

Α3. *Για καθεμιά από τις επόμενες πέντε (5) προτάσεις,* ***α.*** *έως* ***ε.****, να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη* ***Σ****, αν η πρόταση είναι* ***Σωστή****, ή* ***Λ****, αν αυτή είναι* ***Λανθασμένη****.*

α. Το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f είναι το σύνολο Α των τετμημένων των σημείων της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης.

β. Για κάθε συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ’ ένα διάστημα Δ και για κάθε πραγματικό αριθμό c, ισχύει ότι:

$$\left(cf(x)\right)' = f'(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

γ. Αν z_1, z_2 μιγαδικοί αριθμοί με $z_2 \neq 0$, τότε ισχύει ότι:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

δ. Το σύνολο τιμών μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το κλειστό διάστημα [α, β] είναι το κλειστό διάστημα [m, M], όπου m η ελάχιστη και M η μέγιστη τιμή της.

ε. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = x + yi$ με $x, y \in \mathbb{R}$.

Β1. Αν ισχύει ότι $2z - i\bar{z} = 3$, τότε να βρείτε τον μιγαδικό αριθμό z.

Μονάδες 8

Β2. Αν $z = 2 + i$, τότε να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w για τους οποίους ισχύει ότι: $|w + z| = |z^2|$.

Μονάδες 7

Β3. Αν $z = 2 + i$ και $u = \dfrac{\bar{z} + iz}{\bar{z} - 1}$, τότε να αποδείξετε ότι: $u^{2010} = -1$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x + \text{συν}x - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0, \pi)$.

Μονάδες 10

Γ3. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x^2 + 8) = f(6x)$

Μονάδες 5

Γ4. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) + 1}{x}$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x} + 2x,\ \ x \neq 0$. Να βρείτε:

Δ1. Τα τοπικά ακρότατα της f.

Μονάδες 8

Δ2. Τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Μονάδες 8

Δ3. Την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α(1, f(1)).

Μονάδες 4

Δ4. Το σημείο Μ(ξ, f(ξ)), ξ>0, της γραφικής παράστασης C_f της f, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη προς το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με Α(1, f(1)), Β(3, f(3)).

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** οποιαδήποτε άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό διαρκείας και μόνο ανεξίτηλης μελάνης**.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μία (1) ώρα μετά τη διανομή των θεμάτων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 8 ΙΟΥΛΙΟΥ 2010
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α,β]. Αν η f είναι συνεχής στο [α,β] και $f(\alpha)\neq f(\beta)$, να δείξετε ότι για κάθε αριθμό **η** μεταξύ των f(α) και f(β) υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0)=$**η**.

Μονάδες 10

Α2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό***, *αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος***, *αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$$\alpha+\beta i=\gamma+\delta i \Leftrightarrow \alpha=\gamma \text{ και } \beta=\delta$$

β) Για κάθε συνάρτηση f η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της C_f, που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x, και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα x΄x, των τμημάτων της C_f, που βρίσκονται κάτω από τον άξονα x΄x.

γ) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0, και ισχύει $f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0, τότε ισχύει:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \leq \lim_{x \to x_0} g(x)$$

δ) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, τότε και η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f(x_0)g'(x_o) - f'(x_0)g(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

ε) Έστω P(x), Q(x) πολυώνυμα διάφορα του μηδενικού. Οι ρητές συναρτήσεις $\frac{P(x)}{Q(x)}$, με βαθμό του αριθμητή P(x) μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρανομαστή, έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha < 0 < \beta$, η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β).

Αν ισχύει $f(\alpha) = 5\beta$ και $f(\beta) = 5\alpha$, να αποδείξετε ότι:

Β1. Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α, β).

Μονάδες 10

Β2. Υπάρχει σημείο $M(\xi, f(\xi))$ της γραφικής παράστασης C_f της f, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία ε: $x - 5y + 2010 = 0$

Μονάδες 10

Β3. Η συνάρτηση f παίρνει την τιμή $\frac{5}{2}(\alpha + \beta)$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε την εξίσωση $z^2-6z+\gamma=0$ με $\gamma\in\mathbb{R}$, η οποία έχει ρίζες τους μιγαδικούς αριθμούς z_1,z_2 με $\mathrm{Im}(z_1)>0$ και $|z_1|=5$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\gamma=25$.

Μονάδες 8

Γ2. Αν $\gamma=25$, να βρείτε τις ρίζες της παραπάνω εξίσωσης.

Μονάδες 5

Γ3. Αν για τον μιγαδικό αριθμό w ισχύει $|w-z_1|=|w-z_2|$, να αποδείξετε ότι $w\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$(z_1-2-3i)^8+(z_2-4+5i)^8$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x+3)\sqrt{9-x^2}$

Δ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε την παράγωγο της f:

α. στο ανοικτό διάστημα $(-3, 3)$ (Μονάδες 3)

β. στο σημείο $x_0=-3$ (Μονάδες 3)

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f.

Μονάδες 9

Δ4. Να βρείτε τα ακρότατα της f.

Μονάδες 6

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 16 ΜΑΪΟΥ 2011
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι: $f'(x_0) = 0$

Μονάδες 10

Α2. Δίνεται συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z \neq 0$ ορίζουμε $z^0=1$

β) Μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1,x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή: αν $x_1\neq x_2$, τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$

γ) Για κάθε $x\in\mathbb{R}_1=\mathbb{R}-\{x|\text{συν}x=0\}$ ισχύει: $(\text{εφ}x)' = -\dfrac{1}{\text{συν}^2 x}$

δ) Ισχύει ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\text{ημ}\,x}{x}=1$

ε) Οι γραφικές παραστάσεις C και C΄ των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία y=x που διχοτομεί τις γωνίες xOy και x΄Oy΄.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z και w, με $z\neq 3i$, οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z-3i|=1 \quad \text{και} \quad w=z-3i+\frac{1}{z-3i}$$

Β1. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z

Μονάδες 7

Β2. Να αποδείξετε ότι:

$$\bar{z}+3i=\frac{1}{z-3i}$$

Μονάδες 4

Β3. Να αποδείξετε ότι ο w είναι πραγματικός αριθμός και ότι $-2\leq w\leq 2$

Μονάδες 8

Β4. Να αποδείξετε ότι: $|z-w|=|z|$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+\frac{2}{x}, \quad x\neq 0$

Γ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A\left(2, f(2)\right)$

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Γ4. Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f\left(\dfrac{1}{x}\right)-3}{x^2-1}$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(0)=0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f(x)+x f'(x)=ημx$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=xf(x)+συνx$, $x\in\mathbb{R}$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=\frac{1-συνx}{x},\ x\in\mathbb{R} \text{ και } x\neq 0$$

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $1-συνx = xημx$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $ξ\in(0,\pi)$ τέτοιο ώστε:

$$ξημξ+συνξ=1+\frac{2}{\pi^2}ξ^2$$

Μονάδες 7

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2011
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f(x)=συνx είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $(\text{συν}x)'=-\text{ημ}x$

Μονάδες 10

Α2. Έστω Μ (x,y) η εικόνα του μιγαδικού αριθμού z=x+yi στο μιγαδικό επίπεδο. Να διατυπώσετε τον ορισμό του μέτρου του μιγαδικού αριθμού z

Μονάδες 5

Α3. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε μιγαδικό αριθμό z=α+βi, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$z-\bar{z}=2\beta$$

β) Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0\in A$ (ολικό) μέγιστο το $f(x_0)$, όταν $f(x)\le f(x_0)$ για κάθε $x\in A$

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ τότε είναι και 1-1 στο διάστημα αυτό.

δ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο x_0, τότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=+\infty$$

ε) Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z, w, οι οποίοι ικανοποιούν

αντίστοιχα τις σχέσεις:

$$|z-i|=1+\mathrm{Im}(z) \qquad (1)$$

$$w(\overline{w}+3i)=i(3\overline{w}+i) \qquad (2)$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι η παραβολή με εξίσωση $y=\frac{1}{4}x^2$

Μονάδες 7

Β2. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο Κ(0,3) και ακτίνα $\rho=2\sqrt{2}$.

Μονάδες 7

Β3. Να βρείτε τα σημεία Α και Β του μιγαδικού επιπέδου, τα οποία είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, w με z = w.

Μονάδες 5

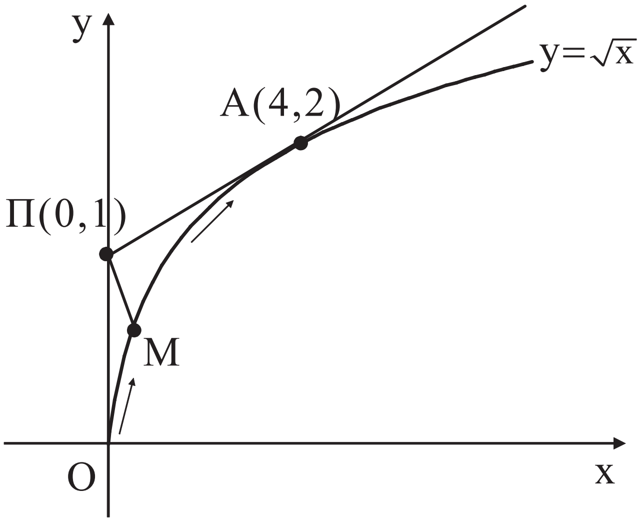
Β4. Αν Λ είναι η εικόνα του μιγαδικού αριθμού u=–i στο μιγαδικό επίπεδο, τότε να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία Κ,Α,Λ,Β είναι τετράγωνο.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Ένα κινητό Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=\sqrt{x}$, $x \geq 0$.

Ένας παρατηρητής βρίσκεται στη θέση Π(0,1) ενός συστήματος συντεταγμένων Oxy και παρατηρεί το κινητό από την αρχή Ο, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του κινητού για κάθε χρονική στιγμή t, $t \geq 0$ είναι $x'(t)=16$m/min

Γ1. Να αποδείξετε ότι η τετμημένη του κινητού, για κάθε χρονική στιγμή t, $t \geq 0$ δίνεται από τον τύπο:

$$x(t)=16t$$

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι το σημείο της καμπύλης, μέχρι το οποίο ο παρατηρητής έχει οπτική επαφή με το κινητό είναι το Α(4,2) και, στη συνέχεια, να υπολογίσετε πόσο χρόνο διαρκεί η οπτική επαφή.

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης y(t) του κινητού για κάθε χρονική στιγμή t, $t>0$ και στη συνέχεια να προσδιορίσετε τη χρονική στιγμή κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του κινητού είναι 4m/min.

Μονάδες 6

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \in (0, \frac{1}{4})$, κατά την οποία η απόσταση d=(ΠΜ) του παρατηρητή από το κινητό γίνεται ελάχιστη.

Μονάδες 8

Να θεωρήσετε ότι το κινητό Μ και ο παρατηρητής Π είναι σημεία του συστήματος συντεταγμένων Oxy.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha}{x^2} - \frac{1}{x-\beta}$ όπου α, β ακέραιοι αριθμοί. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο σημείο της $A(-2, \frac{5}{12})$ δέχεται εφαπτομένη της οποίας ο συντελεστής διεύθυνσης είναι $\frac{5}{18}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι α=1 και β=4.

Μονάδες 5

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

Μονάδες 7

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\kappa x^3 + (1-4\kappa)x^2 - x + 4 = 0 \qquad (1)$$

είναι ισοδύναμη με την $f(x)=\kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$ και, στη συνέχεια, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης (1) για τις διάφορες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7