Η παρακάτω άσκηση δόθηκε για λύση στους μαθητές της Γ τάξης ενός Λυκείου.

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για τις οποίες ισχύουν τα εξής:

i. είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$,

ii. οι γραφικές παραστάσεις τους διέρχονται από το σημείο $A(1,\,1)$

iii. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{xf(x)g(x)-g(x)f(x)-xg(x)+g(x)}{(x-1)^2}=-1$

iv. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)-1}{x-1}=1$.

Να δείξετε ότι υπάρχουν οι εφαπτόμενες των C_f και C_g στο $A(1,\,1)$ και είναι κάθετες μεταξύ τους.

Ο μαθητής Α έδωσε την παρακάτω λύση:

Είναι $f(1)=1$ και $g(1)=1$ αφού το A(1 , 1) ανήκει στις C_f και C_g

Αρκεί να δείξω ότι $f'(1)\cdot g'(1)=-1$

Είναι $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{xf(x)g(x)-g(x)f(x)-xg(x)+g(x)}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{xg(x)\big(f(x)-1\big)-g(x)\big(f(x)-1\big)}{(x-1)^2}=$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\big(f(x)-1\big)\big(xg(x)-g(x)\big)}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)\cancel{(x-1)}\big(f(x)-1\big)}{(x-1)^{\cancel{2}}}=\lim\limits_{x\to1}g(x)\cdot\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}\overset{g\ \text{συνεχής}}{=}$

$=g(1)\cdot\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}=g(1)\cdot f'(1)=1\cdot f'(1)=f'(1)$. Άρα $f'(1)=-1$

Είναι $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)$. Άρα $g'(1)=1$

Οπότε είναι $f'(1)\cdot g'(1)=-1$

Θεωρείτε ότι η λύση που δόθηκε από τον μαθητή Α είναι σωστή; Αν όχι να εντοπίσετε τα λάθη που έχουν γίνει και στη συνέχεια να προτείνεται μια κατά τη γνώμη σας σωστή λύση.

(Μπορείτε να στέλνετε τις απαντήσεις σας με e-mail στη διεύθυνση: apappas@sch.gr)

27/06/11