# ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$f(3)<f'(x)<f(4) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η $f$ είναι γνησίως αύξουσα.

---

2. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι τρείς φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε:

i) $f'(0)<f(1)-f(0)$ και

ii) $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

---

3. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι τρείς φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε:

$$2f(x)\geq f(1)+f(2) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

i) Να αποδείξετε ότι $f(1)=f(2)$.

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(1,\ 2)$ τέτοιο ώστε $f'''(x_0)=0$

---

4. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν ότι:

$$f(x)+2x=f'(x)+x^2 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ και } f(0)=1.$$

i) Να βρείτε τον τύπο της $f$.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f$ παρουσιάζει μοναδικό τοπικό ακρότατο, του οποίου και να βρείτε το είδος.

---

5. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$f(1)<f(3)<f(2)$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,\ 3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$.

---

6. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε:

i) $f(1)=f(3)$ και

ii) $f''(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f$ παρουσιάζει μοναδικό τοπικό ακρότατο, του οποίου και να βρείτε το είδος.

---

7. Δίνεται συνάρτηση $f:[1,\ 4]\to\mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε:

$$f(2)<f(1)<f(4)<f(3).$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $\mathrm{M}(x_0,\ f(x_0))$, με $x_0\in(1,\ 4)$ το οποίο είναι πιθανό σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της $f$.

---

8. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)f'(\beta)=f'(\alpha)f(\beta)$ και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f(\xi)f''(\xi)>0$

---

Παρατήρηση: Αν μία συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη τότε αυτή είναι και συνεχής. Η $f'$ όμως δεν είναι πάντα συνεχής. Για παράδειγμα η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}, & \text{άν } x\neq 0\\ 0 & , \text{ άν } x=0\end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\eta\mu\dfrac{1}{x}-\sigma\upsilon\nu\dfrac{1}{x}, & \text{για } x\neq 0\\ 0, & \text{για } x=0\end{cases}$$

η οποία όμως δεν είναι συνεχής (γιατί;).