ΠΡΟΧΕΙΡΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Α΄ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ
21 ΔΕΚ 2007
ΟΜΑΔΑ Α΄

ΘΕΜΑ 1^{o}

Α. Δίνεται η συνάρτηση $F(x)=f(x)+g(x)$. Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες, να αποδείξετε ότι:

$$\boxed{F'(x)=f'(x)+g'(x)}$$

(20 μονάδες)

Β. Να διατυπώσετε το κριτήριο της πρώτης παραγώγου για την εύρεση της μονοτονίας μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ.

(10 μονάδες)

Γ. Να αντιστοιχίσετε κάθε συνάρτηση της στήλης Α με την παράγωγό της στη στήλη Β. Στη στήλη Β περισσεύουν τρεις συναρτήσεις.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
x	$-\eta\mu x$
$\sqrt{x},\ \ x>0$	$x^{\rho-1}$
	$\sigma\upsilon\nu x$
$x^{\rho}, x>0$ και ρ ρητός	1
	$2\sqrt{x}$
$\eta\mu x$	$\rho x^{\rho-1}$
	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sigma\upsilon\nu x$	$\eta\mu x$

(10 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2^{o}

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2(x-6)+9x-4$.

α. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλη προς την ευθεία $y=-3x+2007$.

(25 μονάδες)

β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x^2-2x+1}$.

(10 μονάδες)

γ. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του ρυθμού μεταβολής της f ως προς x.

(25 μονάδες)

Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα

ΠΡΟΧΕΙΡΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Α΄ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ
21 ΔΕΚ 2007
ΟΜΑΔΑ Β΄

ΘΕΜΑ 1°

Α. Δίνεται η συνάρτηση $F(x)=cf(x)$, όπου $c\in\mathbb{R}$. Αν η συναρτηση f είναι παραγωγίσιμη, να αποδείξετε ότι:

$$\boxed{F'(x)=cf'(x)}$$

(20 μονάδες)

Β. Να διατυπώσετε το κριτήριο της πρώτης παραγώγου για την εύρεση των ακροτάτων μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα (α,β).

(10 μονάδες)

Γ. Να αντιστοιχίσετε κάθε συνάρτηση της στήλης Α με την παράγωγό της στη στήλη Β. Στη στήλη Β περισσεύουν τρείς συναρτήσεις.

ΣΤΗΛΗ Α	**ΣΤΗΛΗ Β**
$\eta\mu x$	1
	$2\sqrt{x}$
$\sigma\upsilon\nu x$	$\rho x^{\rho-1}$
	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x^{\rho}, x>0$ και ρ ρητός	$\eta\mu x$
	$-\eta\mu x$
x	$x^{\rho-1}$
$\sqrt{x},\ \ x>0$	$\sigma\upsilon\nu x$

(10 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2° :

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\left(x^2-12\right)$.

α. Να υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$.

(10 μονάδες)

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $\mathrm{A}\left(1,\ f(1)\right)$.

(25 μονάδες)

γ. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα ακρότατά της.

(25 μονάδες)

Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα

ΠΡΟΧΕΙΡΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ Α΄ΤΕΤΡΑΜΗΝΟΥ
21 ΔΕΚ 2007
ΟΜΑΔΑ Γ΄

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α. Δίνεται μια συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα A. Πότε είναι η συνάρτηση f :

i) παραγωγίσιμη στο $x_0 \in \mathrm{A}$;

ii) παραγωγίσιμη στο διάστημα A ;

(10 μονάδες)

Β. Να διατυπώσετε το κριτήριο της πρώτης παραγώγου για την εύρεση των ακροτάτων μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα (α,β).

(10 μονάδες)

Γ. Να σημειώσετε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές **(Σ)** και ποιες λανθασμένες **(Λ)**. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

i. Αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της συνάρτησης $g(f(x))$ στο σημείο $\mathrm{M}(x_0,y_0)$ είναι ίσος με $f\left(g'(x_0)\right)$.

ii. Δεν υπάρχουν συναρτήσεις οι οποίες δεν έχουν παράγωγο σε κάποιο σημείο του πεδίου ορισμού τους.

(20 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2^{ο} :

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{\ln x}{x},\ \ x>0$.

α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση f.

(20 μονάδες)

β) Να αποδείξετε ότι: $x^e \le e^x$ για κάθε $x \ge 0$. Πότε ισχύει το ίσον;

(10 μονάδες)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f η οποία διέρχεται από το σημείο $\mathrm{O}(0,0)$.

(20 μονάδες)

δ) Αν $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}+\mu^2-4\mu$, $\mu\in\mathbb{R}$, να βρείτε για ποια τιμή του μ η μέγιστη τιμή της g είναι η ελάχιστη δυνατή.

(10 μονάδες)

Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ 2^{Ο} ΘΕΜΑ ΤΗΣ Γ΄ ΟΜΑΔΑΣ
ΟΠΩΣ ΤΙΣ ΕΔΩΣΕ Ο ΜΑΘΗΤΗΣ ΑΡΙΣΤΟΣ ΜΕΛΕΤΟΠΟΥΛΟΣ ΤΟΥ Γ4

α. Είναι $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ με

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-\ln x=0 \Leftrightarrow x=e$$
$$f'(x)>0 \Leftrightarrow 1-\ln x>0 \Leftrightarrow \ln x<1 \Leftrightarrow \ln x<\ln e \Leftrightarrow x<e\ .$$
$$f'(x)<0 \Leftrightarrow 1-\ln x<0 \Leftrightarrow \ln x>1 \Leftrightarrow \ln x>\ln e \Leftrightarrow x>e$$

Με βάση τα στοιχεία αυτά κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμων της $f'(x)$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

και σύμφωνα με το κριτήριο της πρώτης παραγώγου θα έχουμε:
$(0,e]$ η f είναι γνησίως αύξουσα και στο $[e,+\infty)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα και για $x=e$ η f παρουσιάζει μέγιστο ίσο με $f(e)=\frac{1}{e}$.

β. Για $x=0$ έχουμε: $0\leq 1$ που ισχύει.

Για $x>0$ έχουμε: $x^e \leq e^x \Leftrightarrow \ln x^e \leq \ln e^x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x}\leq\frac{1}{e}\Leftrightarrow f(x)\leq f(e)$ που η τελευταία ισχύει επειδή γιατί όπως αποδείξαμε στο προηγούμενο ερώτημα για $x=e$ η f παρουσιάζει μέγιστο

γ. Έστω $(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής. Η εξίσωση της εφαπτομένης επειδή διέρχεται από το $(0,0)$ θα είναι της μορφής

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \quad \Leftrightarrow$$

$$y-\frac{\ln x}{x}=\frac{1-\ln x}{x^2}(x-x_0)\ (1)$$

και επειδή αυτή διέρχεται από το (0,0) θα έχουμε:

$$-\frac{\ln x_0}{x_0}=\frac{1-\ln x_0}{x_0^2}(-x_0)\Leftrightarrow x_0=\sqrt{e}$$

Αντικαθιστώντας στην (1) βρίσκουμε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η

$$y=\frac{1}{2e}x\ .$$

δ. Η μέγιστη τιμή της g σε συνδυασμό με το α ερώτημα είναι ίση με

$$h(\mu)=\frac{1}{e}+\mu^2-4\mu,\ \ \mu\in\mathbb{R}$$

$$h'(\mu)=2\mu-4$$

$2\mu-4=0\Leftrightarrow\mu=2$, $2\mu-4<0\Leftrightarrow\mu<2$ και $2\mu-4>0\Leftrightarrow\mu>2$

Και βρίσκουμε (κατά τα γνωστά) ότι παρουσιάζει ελάχιστο για $\mu=2$, επομένως η μέγιστη τιμή της g γίνεται ελάχιστη για $\mu=2$.