

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ 1^{ΟΥ} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 5x + 6$$

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f , την $f'(x)$ και την $f''(x)$.
 β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 γ. Να αποδείξετε ότι $4f(x) + 1 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 δ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1, f(1))$.
 ε. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{2x - 4}$
 στ. Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της $f(x)$ ως προς x όταν $x = 10$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f .
 β. Να υπολογίσετε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης f .
 γ. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
 δ. Να δείξετε ότι: $f(0) \cdot f(3) - f'(2) = 0$

3. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$$

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f , την $f'(x)$ και την $f''(x)$.
 β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.
 γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f' που διέρχεται από το σημείο $A(1, -3)$.
 δ. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλες προς την ευθεία $y = 9x + 11$
 ε. Να βρείτε σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της f η εφαπτομένη δέχεται τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.
 στ. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - 2x + 1}$
 ζ. Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της $f(x)$ ως προς x όταν $x = 1$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + kx + 2$, με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} και $k \in \mathbb{R}$.

- α) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(3, 8)$, να βρείτε την τιμή του k .
 β) Για $k = -1$
 i) Να αποδείξετε ότι: $f'(x) + f''(x) + 2 = (x+1)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
 ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

5. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και την παράγωγό της.
β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .

γ) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)}$

6. Έχουμε περιφράξει με συρματοπλέγμα μήκους 200 m μια ορθογώνια περιοχή από τις τρεις πλευρές της Η τέταρτη πλευρά είναι τοίχος. Έστω ότι το μήκος του τοίχου που θα χρησιμοποιηθεί είναι x .

- α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της περιοχής που περιφράξαμε δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = 100x - \frac{x^2}{2}$$

- β. Να βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή επιφάνεια που θα μπορούσαμε να περιφράξουμε με το συρματοπλέγμα των 200 m.

7. Σε μια άδεια δεξαμενή σχήματος κύβου ακμής 2 m προσθέτουμε πετρέλαιο. Αν το ύψος h (σε m) της στάθμης του πετρελαίου, ως συνάρτηση του χρόνου t (σε min), είναι:

$$h(t) = \frac{t^2}{18}$$

- α. να βρείτε το ύψος της στάθμης σε χρόνο $t = 3$ min.
β. να δείξετε ότι ο όγκος του πετρελαίου της δεξαμενής μετά από χρόνο t min δίνεται από τον τύπο:

$$V(t) = \frac{2t^2}{9} \text{ m}^3$$

- γ. να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του όγκου του πετρελαίου τη χρονική στιγμή $t = 5$ min.
δ. να βρείτε σε πόσο χρόνο θα γεμίσει η δεξαμενή.

8. Μια βιοτεχνία, μεταξύ άλλων, κατασκευάζει κεραμικά πλακίδια σε σχήμα τριγώνου. Σε κάθε πλακίδιο το άθροισμα της βάσης x και του ύψους που αντιστοιχεί στη βάση αυτή είναι σταθερό και ισούται με 50cm.

- α) Να δείξετε ότι το εμβαδό E της επιφάνειας κάθε τριγωνικού πλακιδίου δίνεται συναρτήσει του x από τον τύπο

$$E(x) = \frac{1}{2}x(50 - x), \quad 0 < x < 50$$

- β) Για ποια τιμή του x το εμβαδό $E(x)$ γίνεται μέγιστο.

- γ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του $E(x)$.

9. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{4}{x}$, $x > 0$ και $M(\alpha, f(\alpha))$ σημείο της γραφικής παράστασης της f . Από το M φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τον άξονα $x'x$ που τέμνει την ευθεία $x + y = 0$ στο σημείο N .

- α) Να αποδείξετε ότι $(MN) = \alpha + \frac{4}{\alpha}$, $\alpha > 0$

- β) Να βρείτε για ποια τιμή του α το μήκος του MN γίνεται ελάχιστο.

Πρόχειρο διαγώνισμα Α' Τετραμήνου
ΠΕΜΠΤΗ 11-12-08
ΕΞΕΤΑΣΤΕΑ ΥΛΗ: 1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ**A. ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ:**

1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$, είναι $f'(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$ είναι $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

3. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} . και c πραγματική σταθερά. Να αποδείξετε ότι:

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

4. Έστω f, g δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο \mathbb{R} . Να αποδείξετε ότι:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

5. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής:

α) στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; β) στο A ;

6. Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

7. Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παραγωγούς των παρακάτω συναρτήσεων:

$$f_1(x) = x^v, \text{ όπου } v \text{ φυσικός,} \quad f_2(x) = \ln x, \text{ όπου } x > 0, \quad f_3(x) = x, \text{ όπου } x \in \mathbb{R},$$

$$f_4(x) = \sin x, \text{ όπου } x \text{ πραγματικός,} \quad f_5(x) = \sqrt{x}, \quad x > 0$$

8. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

9. Να διατυπώσετε το κριτήριο της πρώτης παραγώγου για την εύρεση της μονοτονίας και των ακροτάτων μιας συνάρτησης.

B. ΣΩΣΤΟ-ΛΑΘΟΣ

Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στην κόλλα σας το γράμμα της και δίπλα την ένδειξη (Σ), αν αυτή είναι σωστή, ή την ένδειξη (Λ), αν αυτή είναι λανθασμένη.

1. Έστω f, g πραγματικές συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} , που είναι παραγωγίσιμες σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους. Τότε ισχύει:

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

2. Η παράγωγος κάθε σταθερής συνάρτησης είναι μηδέν σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

3. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει: $(\eta \mu x)' = -\sin x$.

4. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A , λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_0 .

5. Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει: $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$

6. Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (a, \beta)$, $f'(x) > 0$ στο (a, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (a, β) για $x = x_0$ ελάχιστο.

7. Αν f, g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις με $g(x) \neq 0$, τότε ισχύει: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$.

8. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

9. Χαρακτηριστικό γνώρισμα μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα κλειστό διάστημα είναι ότι η γραφική της παράσταση είναι μια συνεχής καμπύλη.

10. Αν x_0 είναι ένας πραγματικός αριθμός τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta \mu x = \eta \mu x_0$.

11. Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς x , όταν $x = x_0$.