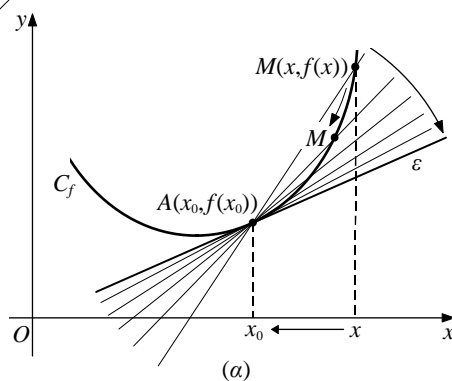


ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ  
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1<sup>ο</sup> : ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

*Usus est magister optimus*

(η χρήση είναι ο καλύτερος δάσκαλος)



ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΠΑΠΠΑΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ  
2<sup>ο</sup> ΓΕΛ ΥΜΗΤΤΟΥ

## ΘΕΜΑΤΑ 2001

### ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΛΥΚΕΙΑ

#### ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \sin x + \eta \mu x.$$

**A.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) + f''(x) = 0$ .

**B.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(0,1)$ .

**Γ.** Να βρείτε την τιμή  $\lambda \in \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει η σχέση:

$$\lambda f' \left( \frac{\pi}{2} \right) - 2f \left( \frac{\pi}{2} \right) = 2$$

**Μονάδες 8**

**Μονάδες 8**

**Μονάδες 9**

### ΕΣΠΕΡΙΝΑ ΛΥΚΕΙΑ

#### ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 + 5x + 6$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**α)** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  δεν έχει ακρότατα.

**β)** Να βρείτε σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

**Μονάδες 10**

**Μονάδες 5**

**γ)** Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{x+1}$

**Μονάδες 10**

## ΘΕΜΑΤΑ 2002

### ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΛΥΚΕΙΑ

#### ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{2x}{x+1}$

**α.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 4**

**β.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ .

**Μονάδες 4**

**γ.** Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος της  $f$ .

**Μονάδες 7**

**δ.** Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της καμπύλης της συνάρτησης  $f$  που είναι παράλληλες στην ευθεία  $y = 2x + 5$ .

**Μονάδες 10**

### ΕΣΠΕΡΙΝΑ ΛΥΚΕΙΑ

#### ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2}$

**α)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f(x)$ .

**Μονάδες 5**

β) Να βρείτε τα :  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x), \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

Μονάδες 12

γ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x)$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $(2, +\infty)$ .

Μονάδες 8

## ΘΕΜΑΤΑ 2003

### ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΛΥΚΕΙΑ

#### ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

Α. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο:

α.  $\mathbb{R}$     β.  $(-1, 1)$     γ.  $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$     δ.  $(1, +\infty)$

Μονάδες 5

Β. Να αποδείξετε ότι  $f'(x) < 0$  για κάθε  $x$  του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 7

Γ. Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 1} [(x+1)f(x)]$

Μονάδες 6

Δ. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $(0, f(0))$  με τον άξονα  $x'x$ .

Μονάδες 7

### ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΛΥΚΕΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

#### ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 5

β. Να δείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της  $f$ , όταν  $x=3$ , ισούται με  $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ .

Μονάδες 10

γ. Αν  $h(x) = \frac{f(x) - \sqrt{3}}{x - 2}$  για  $x \neq 2$ , να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$

Μονάδες 10

### ΕΣΠΕΡΙΝΑ ΛΥΚΕΙΑ

#### ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{3x^2}{4x^2 + 5}$  όπου  $x \in \mathbb{R}$ .

Να βρείτε:

α) το σημείο στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  τέμνει τον άξονα  $x'x$ ,

Μονάδες 5

β) το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Μονάδες 5

γ) την παράγωγο της συνάρτησης f,

Μονάδες 5

δ) τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και αυτά στα οποία είναι γνησίως φθίνουσα και

Μονάδες 5

ε) τα ακρότατα της συνάρτησης f.

Μονάδες 5

### **ΕΣΠΕΡΙΝΑ ΛΥΚΕΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

#### **ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 19}$ , όπου  $x \in \mathbb{R}$ .

Να βρείτε:

α) το και το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  και το  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

Μονάδες 6

β) την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης f, και

Μονάδες 9

γ) τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και αυτά στα οποία είναι γνησίως φθίνουσα.

Μονάδες 10

#### **ΘΕΜΑ 4ο**

Ένα χελιδόني πετάει και το ύψος του h (σε μέτρα), από το έδαφος, δίνεται σε συνάρτηση με το χρόνο t (sec) από τον τύπο:

$$h(t) = 3t^2 - 6t + 5, 0 \leq t \leq 5$$

Να βρείτε :

α) το ύψος στο οποίο το χελιδόني βρίσκεται τη χρονική στιγμή t = 0,

Μονάδες 6

β) το ρυθμό μεταβολής του ύψους h, ως προς t, τη χρονική στιγμή t = 2,

Μονάδες 7

γ) σε ποια χρονική στιγμή t το ύψος του χελιδονιού από το έδαφος γίνεται ελάχιστο και ποιο είναι τότε το ύψος αυτό;

Μονάδες 12

### **ΘΕΜΑΤΑ 2004**

#### **ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΛΥΚΕΙΑ**

#### **ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$$

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

Μονάδες 10

B. Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ .

Μονάδες 15

## ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΛΥΚΕΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο

$$f(x) = \frac{x+2}{e^x}$$

α. Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης.

Μονάδες 9

β. Να αποδείξετε ότι

$$f(x) + f'(x) = \frac{1}{e^x}$$

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο  $A(0, f(0))$ .

Μονάδες 8

### ΕΣΠΕΡΙΝΑ ΛΥΚΕΙΑ

#### ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = x^2 - 5x + 6$  και  $g(x) = x - 3$ , όπου  $x \in \mathbb{R}$ .

α) Να βρείτε τα  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$

Μονάδες 8

β) Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{g(x)}$

Μονάδες 7

γ) Αν  $f'(x)$  και  $g'(x)$  είναι οι παράγωγοι των συναρτήσεων  $f(x)$  και  $g(x)$  αντίστοιχα, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K = 3f'(200) + 819g'(-1)$$

Μονάδες 10

#### ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{2}{1+x^2}, \text{ όπου } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε:

α) το  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Μονάδες 2

β) το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης  $f$  ως προς  $x$ , όταν  $x = 1$ ,

Μονάδες 3

γ) τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα και αυτά στα οποία είναι γνησίως φθίνουσα,

Μονάδες 10

δ) τα ακρότατα της συνάρτησης  $f$ ,

Μονάδες 5

ε) την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $A(1, f(1))$ .

Μονάδες 5

### ΕΣΠΕΡΙΝΑ ΛΥΚΕΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

#### ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 4(x-2), \quad x \in \mathbb{R}$$

α. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο  $f'(x)$ , της  $f(x)$ .

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι:  $xf''(x) - f'(x) = 4$ .

Μονάδες 6

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο με τετμημένη  $x_0 = 1$ .

Μονάδες 7

δ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τα ακρότατα.

Μονάδες 7

**ΤΕΕ ΗΜΕΡΗΣΙΑ**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + ax + \beta$ ,  $a, \beta \in \mathbb{R}$

α) Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης  $f$ .

Μονάδες 5

β) Αν  $f'(1) = 0$  και  $f(2) = 5$ , να βρείτε τα  $a$  και  $\beta$ .

Μονάδες 10

γ) Για τις τιμές των  $a$  και  $\beta$  που βρήκατε στο ερώτημα (β), να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 10

**ΘΕΜΑ 4ο**

Το άθροισμα του μήκους και του πλάτους ενός οικοπέδου, σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου, είναι 200 μέτρα. Αν το μήκος του είναι  $x$  μέτρα:

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του οικοπέδου ως συνάρτηση του  $x$  δίνεται από τον τύπο

$$E(x) = -x^2 + 200x.$$

Μονάδες 5

β) Για ποια τιμή του  $x$  το εμβαδόν του οικοπέδου γίνεται μέγιστο;

Μονάδες 10

γ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού του οικοπέδου.

Μονάδες 10

**ΤΕΕ ΕΣΠΕΡΙΝΑ**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο  $f(x) = x^3 - 12x$ .

α) Να εξετάσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 13

β) Να εξετάσετε για ποιες τιμές του  $x$  η συνάρτηση έχει ακρότατα.

Μονάδες 6

γ) Για κάθε θέση ακρότατου, να υπολογίσετε την τιμή της συνάρτησης.

Μονάδες 6

**ΘΕΜΑΤΑ 2005**

**ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = a \ln x - \beta x^2$  με  $a, \beta \in \mathbb{R}$ .

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

Μονάδες 3

β. Να βρείτε την παράγωγο της  $f$  για κάθε  $x$ , το οποίο ανήκει στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 5

γ. Να βρείτε τα  $a$  και  $\beta$ , ώστε η εφαπτομένη στο σημείο  $A(1,1)$  της γραφικής παράστασης της  $f$  να είναι  $y=3x-2$ .

Μονάδες 10

δ. Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 2} (f'(x) \cdot x^3)$ .

Μονάδες 7

**ΕΣΠΕΡΙΝΑ ΛΥΚΕΙΑ****ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$

**α)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f(x)$ .

**Μονάδες 5**

**β)** Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

**Μονάδες 5**

**γ)** Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

**Μονάδες 7**

**δ)** Να βρείτε την πρώτη παράγωγο  $f'(x)$ , της  $f(x)$ .

**Μονάδες 8**

**ΕΣΠΕΡΙΝΑ ΛΥΚΕΙΑ-ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ****ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$

**α)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 5**

**β)** Να βρείτε την πρώτη παράγωγο  $f'(x)$  και να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f'(x) = 0$  έχει ρίζες τους αριθμούς 3 και  $-1$ .

**Μονάδες 10**

**γ)** Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης  $f$  στο διάστημα  $(1, +\infty)$ .

**Μονάδες 10**

**ΤΕΕ ΗΜΕΡΗΣΙΑ****ΘΕΜΑ 4ο**

Μια ομάδα βιολόγων προτείνει να ληφθούν μέτρα για τη διάσωση ενός είδους δελφινιών. Μετά την εφαρμογή των μέτρων εκτιμάται ότι ο αριθμός των δελφινιών εκφράζεται από τη συνάρτηση  $N(t) = 2t^3 - t^2 + 5t + 1000$ ,  $0 \leq t \leq 10$ , όπου  $t$  ο χρόνος σε έτη.

**α)** Πόσα δελφίνια υπάρχουν κατά την έναρξη εφαρμογής των μέτρων ( $t = 0$ );

**Μονάδες 5**

**β)** Να βρείτε το ρυθμό αύξησης του πληθυσμού των δελφινιών.

**Μονάδες 8**

**γ)** Να βρείτε το ρυθμό αύξησης του πληθυσμού των δελφινιών το δεύτερο έτος.

**Μονάδες 7**

**δ)** Πόσα δελφίνια θα υπάρχουν σε δέκα (10) έτη;

**Μονάδες 5**

**ΤΕΕ ΕΣΠΕΡΙΝΑ**

**ΘΕΜΑ 3ο** Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = x^2 + ax + 5$ , όπου  $a$  πραγματικός αριθμός.

**α)** Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 5**

β) Αν  $f'(-1) = 0$ , να αποδείξετε ότι:  $a = 2$ .

**Μονάδες 10**

γ) Για  $a = 2$ , να εξετάσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία.

**Μονάδες 10**

#### **ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Ένα μικρό ναυπηγείο έχει τη δυνατότητα να κατασκευάζει κατ' έτος μέχρι και είκοσι (20) σκάφη ενός συγκεκριμένου τύπου. Το κόστος κατασκευής (σε χιλιάδες €)  $x$  σκαφών εκφράζεται με τη συνάρτηση  $K(x) = 4x^2 + 30x$  και τα έσοδα από τις πωλήσεις τους (σε χιλιάδες €) με τη συνάρτηση  $E(x) = 3x^2 + 20x$ .

α) Να βρεθεί το κόστος κατασκευής πέντε (5) σκαφών.

**Μονάδες 4**

β) Να βρεθεί ο τύπος  $P(x)$  της συνάρτησης του κέρδους του ναυπηγείου.

**Μονάδες 7**

γ) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους.

**Μονάδες 6**

δ) Πόσα σκάφη πρέπει να κατασκευάζει το ναυπηγείο κατ' έτος για να έχει το μέγιστο κέρδος;

**Μονάδες 8**

### **ΘΕΜΑΤΑ 2006**

#### **ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

#### **ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^x(ax^2 + \beta x + 9)$  με  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο της  $A(2, e^2)$  είναι  $y = -e^2x + 3e^2$ , τότε:

α. Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 1$  και  $\beta = -6$ .

**Μονάδες 12**

β. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 13**

#### **ΕΣΠΕΡΙΝΑ ΛΥΚΕΙΑ**

#### **ΘΕΜΑ 3ο**

Έστω  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = 2x^2 - \alpha x - 8$  με πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών  $\mathbb{R}$ .

I. Να βρεθεί το  $\alpha \in \mathbb{R}$  αν γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης διέρχεται από το σημείο  $A(1, -2)$ .

**Μονάδες 5**

II. Αν  $\alpha = -4$ ,

α) να βρεθεί η παράγωγος  $f'(x)$ .

**Μονάδες 5**

β) να βρεθεί το  $x_0 \in \mathbb{R}$  στο οποίο η συνάρτηση  $f(x)$  παρουσιάζει ακρότατο. Να βρεθεί αν το ακρότατο είναι μέγιστο ή ελάχιστο.

**Μονάδες 10**



γ) να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x)$  στο σημείο  $A(1,-2)$ .

Μονάδες 5

**ΤΕΕ ΗΜΕΡΗΣΙΑ**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο:

$$f(x) = 4x^3 - 12x + 2006, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- α) Να βρεθεί η παράγουσα της  $f$ .
- β) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της  $f$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
- γ) Να εξεταστεί η συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 8

Μονάδες 8

Μονάδες 9

**ΘΕΜΑ 4ο**

Μια βιοτεχνία, μεταξύ άλλων, κατασκευάζει κεραμικά πλακίδια σε σχήμα τριγώνου. Σε κάθε πλακίδιο το άθροισμα της βάσης  $x$  και του ύψους που αντιστοιχεί στη βάση αυτή είναι σταθερό και ισούται με 50cm.

α) Να δείξετε ότι το εμβαδό  $E$  της επιφάνειας κάθε τριγωνικού πλακιδίου δίνεται συναρτήσει του  $x$  από τον τύπο

$$E(x) = \frac{1}{2}x(50-x), \quad 0 < x < 50.$$

Μονάδες 8

β) Για ποια τιμή του  $x$  το εμβαδό  $E(x)$  γίνεται μέγιστο.

Μονάδες 12

γ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του  $E(x)$ .

Μονάδες 5

**ΤΕΕ ΕΣΠΕΡΙΝΑ**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Ένα σώμα αφήνεται να πέσει από την κορυφή ενός κτιρίου ύψους 45m, τη χρονική στιγμή  $t = 0$  sec. Αν θεωρήσουμε την αντίσταση του αέρα αμελητέα, το διάστημα που διανύει το σώμα μετά από  $t$  sec πτώσης δίνεται από τη συνάρτηση:

$$S(t) = 5t^2 \text{ (μέτρα m)}.$$

- α) Να υπολογίσετε το διάστημα που θα διανύσει το σώμα σε χρόνο  $t = 2$  sec.
- β) Να αποδείξετε ότι ο χρόνος που χρειάζεται το σώμα για να φτάσει στο έδαφος, είναι  $t = 3$  sec.
- γ) Να υπολογίσετε:

Μονάδες 4

Μονάδες 7

(i) τον τύπο της ταχύτητας  $u(t)$  του σώματος κάθε χρονική στιγμή  $t$ .

Μονάδες 7

(ii) την ταχύτητα του σώματος τη χρονική στιγμή της πρόσκρουσης στο έδαφος.

Μονάδες 7

**ΘΕΜΑΤΑ 2007**

**ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΛΥΚΕΙΑ**

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο  $f(x) = xe^x + 3$ , όπου  $x$  πραγματικός αριθμός.

α. Να αποδείξετε ότι  $f'(x) = f(x) + e^{-x} - 3$

Μονάδες 10

β. Να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - e^x}{x^2 - x}$

Μονάδες 15

## ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο  $f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 1}$

**α.** Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f(x)$ .

**Μονάδες 5**

**β.** Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

**Μονάδες 8**

**γ.** Να εξετασθεί η συνάρτηση  $f(x)$  ως προς τη μονοτονία και να βρεθούν τα ακρότατά της.

**Μονάδες 12**

### ΕΣΠΕΡΙΝΑ ΛΥΚΕΙΑ

### ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = x^2 + 1$ , όπου  $x \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε

**α)** Το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης  $f$  ως προς  $x$ , όταν  $x=2$ .

**Μονάδες 10**

**β)** Τα ακρότατα της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 10**

**γ)** Το σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην ευθεία  $y=3$ .

**Μονάδες 5**

### ΕΣΠΕΡΙΝΑ ΛΥΚΕΙΑ-ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ

### ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$ .

**α)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$  και την παράγωγό της.

**Μονάδες 10**

**β)** Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 10**

**γ)** Να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf'(x)}{f(x)}$

**Μονάδες 5**

### ΤΕΕ ΗΜΕΡΗΣΙΑ

### ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = x^2 + kx + \lambda$ , όπου  $k, \lambda \in \mathbb{R}$ .

Αν  $f'(1) = 0$  και το σημείο  $A(1, 0)$  ανήκει στη γραφική της παράσταση,

**α.** να δείξετε ότι  $k=-2$  και  $\lambda=1$ .

**Μονάδες 12**

β. να υπολογίσετε τη δεύτερη παράγωγο της f.

Μονάδες 5

γ. να δείξετε ότι για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει:

$$f(x) + f'(x) + f''(x) > 0.$$

Μονάδες 8

#### **ΘΕΜΑ 4ο**

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο  $f(x) = 10 \ln x - 5x^2$ ,  $x > 0$ .

α. Να βρείτε την παράγωγο f' της f.

Μονάδες 5

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 8

γ. Για ποια τιμή του x η f παρουσιάζει ακρότατο. Να προσδιορίσετε το είδος του ακροτάτου και να το υπολογίσετε.

Μονάδες 8

δ. Να δείξετε ότι  $f(x) \leq -5$ , για κάθε  $x > 0$ .

Μονάδες 4

---

#### **ΤΕΕ ΕΣΠΕΡΙΝΑ**

#### **ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ .

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της f.

Μονάδες 4

β. Να υπολογίσετε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης f.

Μονάδες 8

γ. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $(1, +\infty)$ .

Μονάδες 6

δ. Να δείξετε ότι  $f(0) \cdot f(3) - f'(2) = 0$

Μονάδες 7

#### **ΘΕΜΑ 4ο**

Σε μια άδεια δεξαμενή σχήματος κύβου ακμής 2 m προσθέτουμε πετρέλαιο. Αν το ύψος h (σε m) της στάθμης του πετρελαίου, ως συνάρτηση του χρόνου t (σε min), είναι

$$h(t) = \frac{t^2}{18},$$

α. να βρείτε το ύψος της στάθμης σε χρόνο  $t=3$  min,

Μονάδες 5

β. να δείξετε ότι ο όγκος του πετρελαίου της δεξαμενής μετά από χρόνο t min δίνεται από τον τύπο  $V(t) = \frac{2t^2}{9} m^3$ ,

Μονάδες 7

γ. να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του όγκου του πετρελαίου τη χρονική στιγμή  $t=5$  min.

Μονάδες 7

δ. να βρείτε σε πόσο χρόνο θα γεμίσει η δεξαμενή.

Μονάδες 6

## ΘΕΜΑΤΑ 2008

### ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΛΥΚΕΙΑ

#### ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο  $f(x) = \frac{x-1}{e^x}$ , όπου  $x$  πραγματικός αριθμός.

α. Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x f(x)}{x^2 - 1}$

β. Να αποδείξετε ότι  $e^x f'(x) = 2 - x$ .

γ. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης  $f(x)$ .

Μονάδες 7

Μονάδες 9

Μονάδες 9

### ΕΣΠΕΡΙΝΑ ΛΥΚΕΙΑ

#### ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \kappa x + 2$ , με πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$  και  $\kappa \in \mathbb{R}$ .

A) Αν η γραφική παράσταση της  $f$  διέρχεται από το σημείο  $M(3, 8)$ , να βρείτε τον  $\kappa$ .

Μονάδες 5

B) Για  $\kappa = -1$

α) Να αποδείξετε ότι:  $f'(x) + f''(x) + 2 = (x+1)^2$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 10

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης  $f$ .

Μονάδες 10

### ΤΕΕ ΗΜΕΡΗΣΙΑ

#### ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = e^{\lambda x}$ , όπου  $\lambda$  πραγματικός αριθμός.

α. Να βρεθούν οι  $f'(x)$  και  $f''(x)$ .

Μονάδες 6

β. Να προσδιορισθούν οι τιμές του  $\lambda$ , ώστε για κάθε πραγματικό αριθμό  $x$  να ισχύει:

$$f''(x) - f'(x) - 2f(x) = 0$$

Μονάδες 9

γ. Να μελετηθεί η συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία όταν

i)  $\lambda = 2$ , ii)  $\lambda = -1$ .

Μονάδες 10

### ΤΕΕ ΕΣΠΕΡΙΝΑ

#### ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 2008$ .

α. Να βρεθεί η πρώτη παράγωγος  $f'$  της  $f$ .

Μονάδες 6

β. Να εξεταστεί η συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 12

γ. Να δείχθεί ότι  $f(x) \geq 2008$  για κάθε πραγματικό αριθμό  $x$ , όπου  $x \in [1, +\infty)$ .

Μονάδες 7

## ΘΕΜΑΤΑ 2009

### ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΛΥΚΕΙΑ

#### ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - 6x^2 + ax - 7$ , όπου  $a$  πραγματικός αριθμός, για την οποία ισχύει

$$2f''(x) + f'(x) + 15 = 3x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

α. Να δείξετε ότι  $a=9$

Μονάδες 7

β. Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1}$

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$ , η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία  $y = -3x$

Μονάδες 10

### ΗΜΕΡΗΣΙΑ ΛΥΚΕΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

#### ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = ax^3 - 8$ , όπου  $a$  ένας πραγματικός αριθμός.

α. Αν  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -7$ , να βρεθεί η τιμή του  $a$

Μονάδες 5

β. Έστω  $a=1$

i. Να βρεθεί το όριο  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2}$

Μονάδες 10

ii. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο με τετμημένη  $x_0 = 2$

Μονάδες 10

### ΕΣΠΕΡΙΝΑ ΛΥΚΕΙΑ

#### ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$ ,  $x \in \mathbb{R}$

α. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο  $f'(x)$ .

Μονάδες 5

β. Να προσδιορίσετε το διάστημα στο οποίο η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα και το διάστημα στο οποίο η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε τα ακρότατα της  $f$ .

Μονάδες 5

δ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$  στο σημείο της  $(-1, f(-1))$ .

Μονάδες 7

-----

**ΤΕΕ ΗΜΕΡΗΣΙΑ**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο:

$$f(x) = \frac{x-2}{e^x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

**α.** Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης  $f$ .

**Μονάδες 8**

**β.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία.

**Μονάδες 10**

**γ.** Να αποδείξετε ότι για  $x=3$  η  $f$  παρουσιάζει ολικό μέγιστο ίσο με  $\frac{1}{e^3}$ .

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - kx^2 + \lambda x - 2 - \lambda$ , όπου  $k, \lambda \in \mathbb{R}$ .

Αν η γραφική παράσταση της  $f$  διέρχεται από το σημείο  $M(0, -5)$  και  $f'(1) = 0$

**α.** Να βρείτε τις τιμές των  $k$  και  $\lambda$

**Μονάδες 13**

**β.** Για  $k=2$  και  $\lambda=3$ ,

**i.** να μελετήσετε την  $f$  ως προς την μονοτονία.

**Μονάδες 6**

**ii.** να βρείτε την τιμή και το είδος των ακροτάτων της  $f$ .

**Μονάδες 6**

-----

**ΤΕΕ ΕΣΠΕΡΙΝΑ**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - 3x + 2$

**α.** Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης  $f$

**Μονάδες 8**

**β.** Να βρείτε την δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης  $f$

**Μονάδες 8**

**γ.** Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού  $a$  για την οποία ισχύει  $(a-1)f'(0) + 4f''(1) = 27$ .

**Μονάδες 9**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = \ln x - x - 1$ .

**α.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$

**Μονάδες 4**

**β.** Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης  $f$

**Μονάδες 6**

**γ.** Να μελετήσετε την συνάρτηση  $f$  ως προς την μονοτονία.

**Μονάδες 10**

**δ.** Να αποδείξετε ότι:  $\ln 2008 - 2009 > \ln 2009 - 2010$

**Μονάδες 5**