

ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ-ΟΜΟΙΟΓΕΝΕΙΑ-ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

1. Οι βαθμοί ενός μαθητή σε πέντε μαθήματα ήταν:

8, 14, 20, 12, 16

α. Να υπολογισθεί η μέση βαθμολογία του μαθητή.

β. Να προσδιορισθεί η διάμεσος.

γ. Να υπολογισθεί η τυπική απόκλιση.

δ. Να υπολογισθεί το εύρος.

ε. Να υπολογισθεί ο συντελεστής μεταβλητότητας και στη συνέχεια να εξεταστεί αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

2. Δίνονται 5 παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής X:

16, 14, 22, 18, 20 + α, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

Αν ο συντελεστής μεταβλητότητας (CV) των παρατηρήσεων αυτών είναι 20% και η τυπική απόκλισή τους (s) είναι 4, τότε:

α) Να δείξετε ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι $\bar{x} = 20$

β) Να υπολογίσετε την τιμή του πραγματικού αριθμού α.

γ) Για την τιμή του α που υπολογίσατε στο ερώτημα β, να βρείτε τη διάμεσο του δείγματος.

δ) Είναι το δείγμα ομοιογενές ή όχι και γιατί.

3. Η μέση τιμή των βαθμών που πήραν οι 25 μαθητές της Γ' τάξης ενός Λυκείου στα Μαθηματικά είναι 14, ενώ η μέση τιμή των βαθμών των 10 μαθητών που παρουσίασαν τη μικρότερη βαθμολογία είναι 11.

α. Να βρείτε τη μέση τιμή της βαθμολογίας των 15 υπόλοιπων μαθητών.

β. Αν το άθροισμα των τετραγώνων των βαθμών των 25 αυτών μαθητών είναι 5000, να βρείτε το συντελεστή μεταβολής (CV).

4. Θεωρούμε δύο δείγματα A και B με παρατηρήσεις:

Δείγμα A: 12, 18, t_3, t_4, \dots, t_{25}

Δείγμα B: 16, 14, t_3, t_4, \dots, t_{25}

Δίνεται ότι $t_3 + t_4 + \dots + t_{25} = 345$.

α. Να αποδείξετε ότι οι μέσες τιμές \bar{x}_A και \bar{x}_B των δύο δειγμάτων A και B αντίστοιχα είναι $\bar{x}_A = \bar{x}_B = 15$.

β. Αν s_A^2 είναι η διακύμανση του δείγματος A και s_B^2 είναι η διακύμανση του δείγματος B, να αποδείξετε ότι:

$$s_B^2 - s_A^2 = \frac{16}{25}$$

γ. Αν ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος A είναι ίσος με $CV_A = \frac{1}{15}$, να βρείτε τον συντελεστή μεταβολής του δείγματος B.

5. Για δύο τύπους μπαταριών A και B επιλέχθηκαν δύο δείγματα μεγέθους 5 το καθένα. Οι χρόνοι ζωής των μπαταριών για το κάθε δείγμα (σε χιλιάδες ώρες) δίνονται στον επόμενο πίνακα:

ΤΥΠΟΣ A	20	26	24	22	18
ΤΥΠΟΣ B	26	32	19	20	23

α. Να βρείτε τη μέση διάρκεια ζωής μιας μπαταρίας τύπου A και μιας μπαταρίας τύπου B.

- β.** Αν μια μπαταρία τύπου Α στοιχίζει 38 ευρώ και μια μπαταρία τύπου Β στοιχίζει 40 ευρώ, ποιον τύπο μπαταρίας συμφέρει να αγοράσετε; (Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας).
- γ.** Να βρείτε τις τυπικές αποκλίσεις S_A και S_B της διάρκειας ζωής των δύο τύπων μπαταριών.
- δ.** Να βρείτε ποιος από τους δύο τύπους μπαταριών Α και Β παρουσιάζει τη μεγαλύτερη ομοιογένεια ως προς τη διάρκεια ζωής του (Δίνεται: $\sqrt{11} \approx 3,3$).

6. Οι μηνιαίοι μισθοί των υπαλλήλων μιας Αμερικανικής εταιρείας έχουν μέση τιμή $\bar{x}_A = 1000$ δολάρια και τυπική απόκλιση $s_A = 125$. Οι μισθοί των υπαλλήλων μιας Ευρωπαϊκής εταιρείας έχουν μέση τιμή $\bar{x}_E = 800$ ευρώ και τυπική απόκλιση $s_E = 900$.

- α)** Να βρείτε ποια από τις δύο εταιρείες έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια μισθών.
- β)** Η Αμερικανική εταιρεία αποφασίζει να αυξήσει το μηνιαίο μισθό κάθε υπαλλήλου κατά 250 δολάρια. Επίσης η Ευρωπαϊκή εταιρεία αποφασίζει να αυξήσει το μηνιαίο μισθό κάθε υπαλλήλου κατά 20%.
Να βρείτε τη νέα μέση τιμή και τη νέα τυπική απόκλιση των μηνιαίων μισθών και για τις δύο εταιρείες.
- γ)** Ποια από τις δύο εταιρείες έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια των μηνιαίων μισθών μετά τις αυξήσεις;

7. Έστω x_1, x_2, \dots, x_{11} ένα δείγμα με παρατηρήσεις:

7, 5, α, 2, 5, β, 8, 6, γ, 5, 3,

όπου α, β, γ φυσικοί αριθμοί με $\alpha < \beta < \gamma$.

Δίνεται ότι η μέση τιμή, η διάμεσος και το εύρος των παρατηρήσεων είναι $\bar{x} = 6$, $\delta = 6$ και $R = 8$ αντίστοιχα.

α. Να βρεθούν οι τιμές των α, β, γ, έτσι ώστε να ισχύει: $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 217$

β. Για τις τιμές των α, β, γ, που βρέθηκαν στο προηγούμενο ερώτημα, ναδειχθεί ότι η τυπική απόκλιση του δείγματος

είναι ίση με: $s_x = \sqrt{\frac{58}{11}}$ και να εξετασθεί αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

γ. Έστω y_1, y_2, \dots, y_{11} οι παρατηρήσεις που προκύπτουν αν πολλαπλασιάσουμε τις x_1, x_2, \dots, x_{11} επί μια θετική σταθερά c_1 και στη συνέχεια προσθέσουμε μια σταθερά c_2 . Αν $\bar{y} = 9$ και $s_y = 2s_x$, να βρεθούν οι τιμές των σταθερών c_1 και c_2 .

8. Η μέση τιμή ενός δείγματος είναι $\bar{x} = 14$ και η τυπική απόκλιση $s = 2$.

- α.** Να αποδείξετε ότι το δείγμα των παρατηρήσεων που έχει ληφθεί, δεν είναι ομοιογενές.
- β.** Να βρείτε τη μικρότερη τιμή της παραμέτρου $a > 0$, που πρέπει να προστεθεί σε κάθε μία από τις προηγούμενες παρατηρήσεις, ώστε το δείγμα των νέων παρατηρήσεων να είναι ομοιογενές.

9. Έχουμε περιφράξει με συρματοπλέγμα μήκους 200 m μια ορθογώνια περιοχή από τις τρεις πλευρές της. Η τέταρτη πλευρά είναι τοίχος. Έστω ότι το μήκος του τοίχου που θα χρησιμοποιηθεί είναι x.

α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της περιοχής που περιφράξαμε δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = 100x - \frac{x^2}{2}$$

β. Να βρείτε τη μεγαλύτερη δυνατή επιφάνεια που θα μπορούσαμε να περιφράξουμε με το συρματοπλέγμα των 200 m.

γ. Να βρείτε τη μέση τιμή των αριθμών **$f'(100)$, $f'(101)$, $f'(102)$, $f'(103)$ και $f'(104)$.**

δ. Έστω **CV** ο συντελεστής μεταβολής των αριθμών **$f'(100)$, $f'(101)$, $f'(102)$, $f'(103)$ και $f'(104)$** και **CV'** ο συντελεστής μεταβολής που προκύπτει όταν αυξήσουμε καθέναν από τους αριθμούς αυτούς κατά **c**, όπου **c ≠ 2**. Να υπολογίσετε το **c**, έτσι ώστε να ισχύει **CV' = 2CV**.