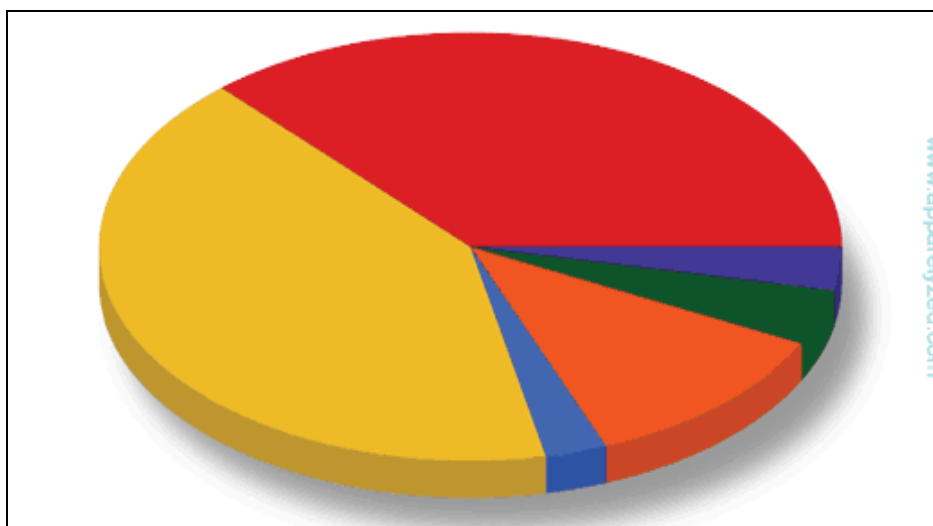


**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**

**ΘΕΜΑΤΑ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ**

2001-2009



**ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΠΑΠΠΑΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ
2^ο ΓΕΛ ΥΜΗΤΤΟΥ
ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2010**

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 11 ΙΟΥΝΙΟΥ 2001
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ(4)

ΘΕΜΑ 1ο

Α. α) Στη **Στήλη I** του παρακάτω πίνακα δίνονται συναρτήσεις $f(x)$ και στη **Στήλη II** οι παράγωγοί τους $f'(x)$. Να γράψετε τα γράμματα της **Στήλης I** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης II** που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

| Στήλη I Συνάρτηση $f(x)$ | Στήλη II Παράγωγος $f'(x)$ |
|----------------------------------|-------------------------------|
| A. x | 1. $-\eta\mu x$ |
| B. \sqrt{x} , $x > 0$ | 2. x^{e-1} |
| Γ. x^e , $x > 0$ και e ρητός | 3. $\sigma\upsilon\nu x$ |
| Δ. $\eta\mu x$ | 4. 1 |
| E. $\sigma\upsilon\nu x$ | 5. $2\sqrt{x}$ |
| | 6. $e x^{e-1}$ |
| | 7. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| | 8. $\eta\mu x$ |

Μονάδες 5

β) Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ στο \mathbf{R} . Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

$$f(x) + g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)} \text{ με } g(x) \neq 0, \quad f(g(x)).$$

Μονάδες 7,5

B. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων:

α) $f_1(x) = x^3 + \eta\mu x + 3 \sigma\upsilon\nu x$

β) $f_2(x) = (x - 1)^2$

γ) $f_3(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

δ) $f_4(x) = \sqrt{x^2 + 3}$

ε) $f_5(x) = \sigma\upsilon\nu(2x+3)$

Μονάδες 12,5

ΘΕΜΑ 2ο

Η εξέταση 10 μαθητών στο μάθημα της Στατιστικής έδωσε τους εξής βαθμούς:

11 3 7 5 16 14 11 10 11 12

Να βρείτε:

α) τη διάμεσο,

- β) τη μέση τιμή,
 - γ) την επικρατούσα τιμή,
 - δ) το εύρος και
 - ε) τη διακύμανση
- της παραπάνω βαθμολογίας.

Μονάδες 25

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας κατανομής συχνοτήτων της μεταβλητής X:

| Κλάσεις | Κεντρικές τιμές | Συχνότητα | Σχετική Συχνότητα | Αθροιστική Σχετική Συχνότητα |
|---------------|-----------------|-----------|-------------------|------------------------------|
| [-) | x_i | v_i | f_i | $F_i\%$ |
| 1 - 5 | | | | 20 |
| 5 - 9 | | | | 50 |
| 9 - 13 | | | | 85 |
| 13 - 17 | | | | 95 |
| 17 - 21 | | 2 | | |
| Σύνολο | | | 1 | |

Να γράψετε στο τετράδιό σας συμπληρωμένο τον πίνακα.

Μονάδες 25

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 5x + 6$, $x \in \mathbf{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

Μονάδες 10

β) Να βρείτε σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

Μονάδες 5

γ) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 5x + 6}{x + 1}$

Μονάδες 10

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους υποψηφίους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 20 ΜΑΙΟΥ 2002
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ(4)

ΘΕΜΑ 1ο

α) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x)=x$ είναι $f'(x)=1$.

Μονάδες 9

β) Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της και, ακριβώς δίπλα, την ένδειξη (Σ), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (Λ), αν αυτή είναι λανθασμένη, θεωρώντας ότι υπάρχουν οι $f'(x)$ και $g'(x)$.

1. $[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)$

2. $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$

3. $[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g'(x)$

4. $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$, $g(x) \neq 0$

5. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$

6. $[c\cdot f(x)]' = c\cdot f'(x)$

7. $(\sigma\upsilon\nu x)' = \eta\mu x$

8. $(x^\rho)' = x^{\rho-1}$, ρ ρητός, $x > 0$

Μονάδες 16

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)$.

Μονάδες 5

β) Να βρείτε τα : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

Μονάδες 12

γ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Τα αποτελέσματα των εκλογών σε ένα εκλογικό τμήμα δίνονται από τον παρακάτω (ελλιπή) πίνακα:

| Κόμμα | Συχνότητα | Σχετική Συχνότητα |
|---------------|-----------|-------------------|
| x_i | v_i | f_i |
| A | | 0,15 |
| B | 150 | 0,30 |
| Γ | | 0,35 |
| Δ | | |
| Σύνολο | | |

α) Να βρείτε πόσοι εκλογείς ψήφισαν στο τμήμα αυτό.

Μονάδες 10

β) Να βρείτε πόσες ψήφους πήρε κάθε κόμμα σε αυτό το εκλογικό τμήμα.

Μονάδες 10

γ) Να σχεδιάσετε το ραβδόγραμμα των σχετικών συχνοτήτων.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Μια εταιρεία απασχολεί 20 εργαζόμενους εκ των οποίων οι 10 εργάζονται στο τμήμα **A** και οι 10 στο τμήμα **B**.

Η μέση τιμή των μηνιαίων μισθών του τμήματος **A** είναι 720 ευρώ και ο μεγαλύτερος μισθός του τμήματος είναι 900 ευρώ.

Οι μισθοί των εργαζομένων στο τμήμα **B** είναι :
950, 900, 1060, 980, 920, 945, 975, 930, 900, 940.

Να βρείτε :

α) Το άθροισμα των μηνιαίων μισθών του τμήματος **A**.

Μονάδες 6

β) Τη μέση τιμή, το εύρος και την επικρατούσα τιμή των μισθών του τμήματος **B**.

Μονάδες 9

γ) Τη μέση τιμή και τη διάμεσο των μισθών όλων των εργαζομένων στην επιχείρηση.

Μονάδες 10

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 19 ΜΑΪΟΥ 2003
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1ο

A) Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$. Να αποδείξετε ότι

$$f'(x) = 2x.$$

Μονάδες 10

B) Ας υποθέσουμε ότι x_1, x_2, \dots, x_k είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X , που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n (όπου $k \leq n$), v_i είναι η συχνότητα και f_i είναι σχετική συχνότητα της τιμής x_i , $i = 1, 2, \dots, k$.

Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη (Σ), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (Λ), αν αυτή είναι λανθασμένη.

α) Το άθροισμα όλων των σχετικών συχνοτήτων των τιμών της μεταβλητής X είναι ίσο με 100.

β) Η μέση τιμή \bar{x} ορίζεται από τη σχέση:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i v_i$$

γ) Για τη σχετική συχνότητα f_i ισχύει ότι $f_i > 1$, για κάθε $i = 1, 2, \dots, k$.

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

- δ) Ο συντελεστής μεταβολής CV ορίζεται (για $\bar{x} \neq 0$) από το λόγο:

$$CV = \frac{\text{τυπική απόκλιση}}{\text{μέση τιμή}} .$$

- ε) Η διακύμανση (ή διασπορά) της μεταβλητής X ορίζεται από τη σχέση:

$$s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 v_i .$$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ 2ο

Ένα δείγμα εργαζομένων μιας εταιρείας εξετάστηκε ως προς το χρόνο (σε ώρες) υπερωριακής απασχόλησης κατά τη διάρκεια ενός μηνός και προέκυψε ο παρακάτω πίνακας.

| Ώρες υπερωριακής απασχόλησης Κλάσεις [-) | Αθροιστική συχνότητα N_i |
|---|-------------------------------|
| 0 – 2 | 5 |
| 2 – 4 | 15 |
| 4 – 6 | 20 |
| 6 – 8 | 35 |
| 8 – 10 | 40 |

Να βρείτε:

- α) το μέγεθος του δείγματος,

Μονάδες 5

- β) τις συχνότητες και τις σχετικές συχνότητες των κλάσεων και

Μονάδες 10

γ) τη μέση τιμή.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x^2}{4x^2 + 5}$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε:

α) το σημείο στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα x' ,

Μονάδες 5

β) το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$,

Μονάδες 5

γ) την παράγωγο της συνάρτησης f ,

Μονάδες 5

δ) τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και αυτά στα οποία είναι γνησίως φθίνουσα και

Μονάδες 5

ε) τα ακρότατα της συνάρτησης f .

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Οι χρόνοι σε ώρες (παρατηρήσεις) που έξι από τους επίγειους σταθμούς δεν είχαν επαφή με τον Ελληνοκυπριακό δορυφόρο είναι:

$$t_1 = 0, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = 1, \quad t_4 = 2, \quad t_5 = 4, \quad t_6 = 5 .$$

α) Να βρείτε τη μέση τιμή \bar{x} και τη διάμεσο δ των παρατηρήσεων.

Μονάδες 6

β) Αν $f(x) = (t_1-x)^2 + (t_2-x)^2 + (t_3-x)^2 + (t_4-x)^2 + (t_5-x)^2 + (t_6-x)^2$,
τότε:

i) να αποδείξετε ότι $f'(\bar{x}) = 0$

Μονάδες 6

ii) να αποδείξετε ότι $f(\bar{x}) = 6s^2$, όπου s^2 είναι η διακύμανση των παρατηρήσεων και

Μονάδες 5

iii) να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(\bar{x}, f(\bar{x}))$.

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους υποψηφίους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 30 ΙΟΥΝΙΟΥ 2003
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)**

ΘΕΜΑ 1ο

A. Έστω ότι t_1, t_2, \dots, t_n είναι οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X ενός δείγματος, μεγέθους n και \bar{x} η μέση τιμή των παρατηρήσεων.

Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{(t_1 - \bar{x}) + (t_2 - \bar{x}) + \dots + (t_n - \bar{x})}{n} = 0$$

Μονάδες 13

B. Να γράψετε στο τετράδιό σας την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

$f(x) = x, \quad g(x) = \eta\mu x, \quad h(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και $\varphi(x) = c,$
όπου c σταθερά.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ 2ο

Η εξέταση ενός δείγματος 20 υπαλλήλων μιας επιχείρησης, ως προς τον αριθμό των ημερών που αυτοί απουσίασαν κατά το μήνα Δεκέμβριο του 2002, έδωσε τις εξής παρατηρήσεις:

0, 1, 1, 3, 0, 0, 2, 4, 0, 1, 1, 2, 0, 1, 3, 0, 0, 0, 0, 0 .

α) Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα και να συμπληρώσετε όλα τα στοιχεία που λείπουν.

| Ημέρες απουσίας x_i | Συχνότητα v_i | Σχετική Συχνότητα f_i | Αθροιστική Συχνότητα N_i | Αθροιστική Σχετική Συχνότητα F_i |
|--------------------------|--------------------|----------------------------|-------------------------------|------------------------------------|
| 0 | | | | |
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |
| 4 | | | | |
| Σύνολο | | | | |

Μονάδες 10

β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή \bar{x} των παρατηρήσεων.

Μονάδες 5

γ) Να βρείτε τη διάμεσο δ των παρατηρήσεων.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 19}$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε:

α) το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και το $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$,

Μονάδες 6

β) την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης f , και

Μονάδες 9

γ) τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και αυτά στα οποία είναι γνησίως φθίνουσα.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Ένα χελιδόني πετάει και το ύψος του h (σε μέτρα), από το έδαφος, δίνεται σε συνάρτηση με το χρόνο t (sec) από τον τύπο:

$$h(t) = 3t^2 - 6t + 5, \quad 0 \leq t \leq 5$$

Να βρείτε :

α) το ύψος στο οποίο το χελιδόني βρίσκεται τη χρονική στιγμή $t = 0$,
Μονάδες 6

β) το ρυθμό μεταβολής του ύψους h , ως προς t , τη χρονική στιγμή $t = 2$,
Μονάδες 7

γ) σε ποια χρονική στιγμή t το ύψος του χελιδονιού από το έδαφος γίνεται ελάχιστο και ποιο είναι τότε το ύψος αυτό;
Μονάδες 12

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους υποψηφίους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν.
Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση.
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης : Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 17 ΜΑΪΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1ο

A) Να γράψετε τον ορισμό της διαμέσου δ ενός δείγματος n παρατηρήσεων, οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά.

Μονάδες 5

B) Ας υποθέσουμε ότι t_1, t_2, \dots, t_n είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X , που αφορά τις παρατηρήσεις ενός δείγματος μεγέθους n . Να γράψετε τη σχέση που δίνει τη μέση τιμή \bar{x} των παρατηρήσεων του δείγματος.

Μονάδες 5

Για καθεμιά από τις προτάσεις Γ) και Δ), να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και ακριβώς δίπλα την ένδειξη (Σ), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (Λ), αν αυτή είναι λανθασμένη.

Γ) Αν οι τιμές x_1, x_2, \dots, x_k μιας ποσοτικής μεταβλητής X είναι σε αύξουσα διάταξη και οι αντίστοιχες απόλυτες συχνότητές τους είναι v_1, v_2, \dots, v_k , τότε η αθροιστική συχνότητα της τιμής x_i είναι

$$N_i = v_1 + v_2 + \dots + v_i, \quad \text{για } i = 1, 2, \dots, k.$$

Μονάδες 2

Δ) Γενικά δεχόμαστε ότι ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής θα είναι ομοιογενές εάν ο συντελεστής μεταβολής (CV) ξεπερνά το 10%.

Μονάδες 3

Ε) Ας υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις f, g έχουν και οι δύο πεδίο ορισμού ένα σύνολο A . Να γράψετε στο τετράδιό σας το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $R = \frac{f}{g}$ με

$$R(x) = \frac{f(x)}{g(x)} .$$

Μονάδες 5

ΣΤ) Υποθέτουμε ότι f είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A . Πότε η f λέγεται συνεχής σ' ένα σημείο $x_0 \in A$;

Μονάδες 2

Ζ) Να μεταφέρετε συμπληρωμένες στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \eta\mu x = \dots , \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \sigma\upsilon\nu x = \dots ,$$
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \epsilon\phi x = \dots \quad (\acute{\omicron}\tau\alpha\nu \sigma\upsilon\nu x_0 \neq 0) .$$

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 5x + 6$ και $g(x) = x - 3$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τα $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$.

Μονάδες 8

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Μονάδες 7

γ) Αν $f'(x)$ και $g'(x)$ είναι οι παράγωγοι των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$ αντίστοιχα, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K = 3 f'(200) + 819 g'(-1) .$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Οι εισπράξεις (σε χιλιάδες ευρώ) ενός δείγματος δέκα υποκαταστημάτων μιας εμπορικής επιχείρησης, κατά το μήνα Απρίλιο του 2004, ήταν:

50, 15, 15, 20, 15, 30, 15, 20, 50, 50.

α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή \bar{x} των εισπράξεων.

Μονάδες 5

β) Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα και να συμπληρώσετε όλα τα στοιχεία του.

| Εισπράξεις (σε χιλιάδες ευρώ) x_i | Συχνότητα v_i | Σχετική συχνό- τητα f_i | $x_i - \bar{X}$ | $(x_i - \bar{X})^2$ | $(x_i - \bar{X})^2 v_i$ |
|--|--------------------|------------------------------------|-----------------|---------------------|-------------------------|
| 15 | | | | | |
| 20 | | | | | |
| 30 | | | | | |
| 50 | | | | | |
| Σύνολο | | | | | |

Μονάδες 15

γ) Θεωρώντας γνωστό ότι για τη διακύμανση ισχύει ο τύπος

$$s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 v_i, \text{ να υπολογίσετε:}$$

γ₁) τη διακύμανση των εισπράξεων,

Μονάδες 3

γ₂) την τυπική απόκλιση.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2}{1+x^2}$, όπου $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε:

α) το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$,

Μονάδες 2

β) το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f ως προς x , όταν $x = 1$,

Μονάδες 3

γ) τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και αυτά στα οποία είναι γνησίως φθίνουσα,

Μονάδες 10

δ) τα ακρότατα της συνάρτησης f ,

Μονάδες 5

ε) την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(1, f(1))$.

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους υποψηφίους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα δεν θα τα αντιγράψετε στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν.
Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση.
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 28 ΙΟΥΝΙΟΥ 2004
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1ο

A. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x)=x$, είναι $(x)' = 1$.

Μονάδες 10

Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις, να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και δίπλα την ένδειξη (Σ), αν αυτή είναι σωστή ή την ένδειξη (Λ), αν αυτή είναι λανθασμένη.

B. Ισχύει ότι: $(x^v)' = vx^{v-1}$, όπου v φυσικός αριθμός.

Μονάδες 3

Γ. Η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i , μιας μεταβλητής X , είναι $f_i = \frac{v_i}{v}$, $i = 1, 2, \dots, k$, v_i η συχνότητα της τιμής x_i και v το μέγεθος του δείγματος.

Μονάδες 3

Δ. Αν f_1, f_2, \dots, f_k είναι οι σχετικές συχνότητες των τιμών x_1, x_2, \dots, x_k μιας μεταβλητής X ενός δείγματος μεγέθους v , ισχύει: $f_1 + f_2 + \dots + f_k = 100$.

Μονάδες 3

Ε. Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής θα είναι ομοιογενές, αν ο συντελεστής μεταβολής ξεπερνά το 10%.

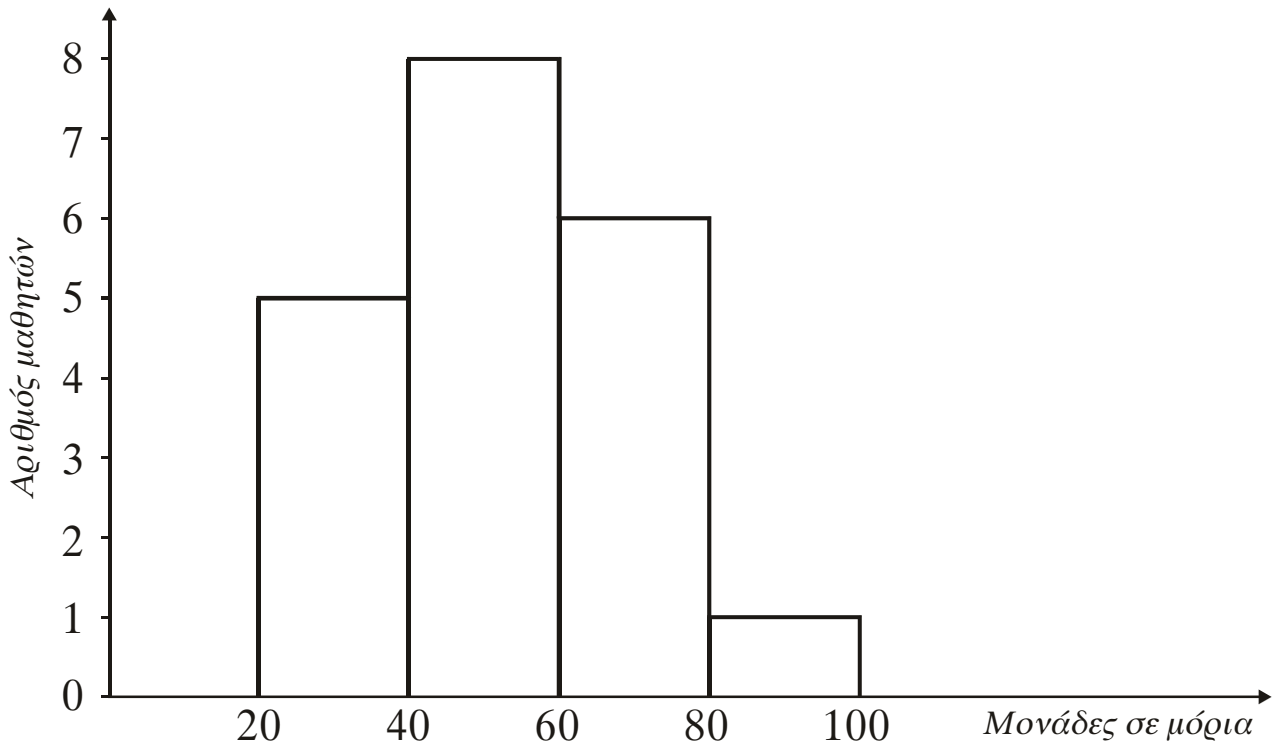
Μονάδες 3

ΣΤ. Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του $y=f(x)$ ως προς x , όταν $x = x_0$.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι βαθμολογίες, στην εκατοντάβαθμη κλίμακα, των μαθητών ενός τμήματος της Δ΄ τάξης, κάποιου Εσπερινού Ενιαίου Λυκείου, στα μαθηματικά γενικής παιδείας.



α. Να βρείτε πόσοι είναι οι μαθητές του τμήματος.

Μονάδες 7

β. Να βρείτε πόσοι είναι οι μαθητές που έχουν βαθμό από 40 μόρια και πάνω.

Μονάδες 7

γ. Να κατασκευάσετε τον πίνακα με τις συχνότητες v_i , τις κεντρικές τιμές x_i και τα γινόμενα $x_i v_i$. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των βαθμών των μαθητών του τμήματος.

Μονάδες 11

ΘΕΜΑ 3ο

Τα βάρη μιας ομάδας, πέντε μαθητών, είναι:

62, 77, 65, 72, 69 κιλά

α. Να αποδείξετε ότι το μέσο βάρος των πέντε μαθητών είναι 69 κιλά.

Μονάδες 5

β. Να υπολογίσετε τη διάμεσο των τιμών των βαρών.

Μονάδες 5

γ. Να υπολογίσετε το εύρος των τιμών των βαρών.

Μονάδες 5

δ. Αν προστεθεί στην ομάδα ένας έκτος μαθητής και το μέσο βάρος των έξι μαθητών γίνει 72 κιλά, να βρείτε το βάρος του έκτου μαθητή που προστέθηκε στην ομάδα.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - 4(x-2), x \in \mathbb{R}.$$

α. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο $f'(x)$, της $f(x)$.

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι: $x f''(x) - f'(x) = 4$.

Μονάδες 6

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$.

Μονάδες 7

δ. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα.

Μονάδες 7

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 23 ΜΑΙΟΥ 2005
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)**

ΘΕΜΑ 1^ο

A) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$ είναι $(c)' = 0$.

Μονάδες 10

B) Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

Γ) Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και δίπλα την ένδειξη (**Σ**), αν αυτή είναι σωστή, ή την ένδειξη (**Λ**), αν αυτή είναι λανθασμένη.

α) Σε μία κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το εύρος ισούται περίπου με έξι τυπικές αποκλίσεις, δηλαδή $R \approx 6s$.

Μονάδες 2

β) Ο συντελεστής μεταβολής ενός δείγματος τιμών μιας οιασδήποτε μεταβλητής X ορίζεται (για $s \neq 0$) από το λόγο $CV = \frac{\bar{x}}{s}$, όπου \bar{x} η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση.

Μονάδες 2

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $(\sin x)' = \eta \mu x$.

Μονάδες 2

δ) Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x = f(t)$, θα είναι τη χρονική στιγμή t_0

$$v(t_0) = f'(t_0).$$

Μονάδες 2

ε) Σε ένα δείγμα τιμών μιας οιασδήποτε μεταβλητής X το εύρος R ορίζεται από τη σχέση:

$R = \text{μεγαλύτερη παρατήρηση} + \text{μικρότερη παρατήρηση}.$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(x)$.

Μονάδες 5

β) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$.

Μονάδες 5

γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Μονάδες 7

δ) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο $f'(x)$, της $f(x)$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Οι ώρες παρακολούθησης τηλεοπτικών προγραμμάτων από 20 άτομα σε διάστημα μιας εβδομάδας αναγράφονται στον παρακάτω (ελλιπή) πίνακα:

| Ωρες παρακολούθησης x_i | Συχνότητα v_i | $x_i v_i$ | $x_i^2 v_i$ |
|------------------------------|--------------------|-----------|-------------|
| 2 | | | |
| 3 | 6 | | |
| 9 | | | |
| 11 | 2 | | |
| Σύνολο | $v = 20$ | | |

Στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων του παραπάνω πίνακα δίνεται ότι η γωνία του κυκλικού τομέα, που αντιστοιχεί στην παρατήρηση $x_1 = 2$ ώρες, είναι $\alpha_1 = 72^0$.

α) Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να τον συμπληρώσετε.

Μονάδες 12

β) Θεωρώντας γνωστό ότι για τη διακύμανση ισχύει ο τύπος

$$s^2 = \frac{1}{v} \left[\sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^k x_i v_i \right)^2}{v} \right]$$

να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση s .

Μονάδες 5

γ) Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβολής CV του δείγματος.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4^ο

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι ώρες πρωινής εργασίας των μαθητών ενός τμήματος Εσπερινού Λυκείου:

| Ώρες εργασίας μαθητών x_i | Συχνότητα v_i |
|--------------------------------|--------------------|
| 1 | α |
| 2 | 5 |
| 3 | β |
| 4 | 2 |
| 5 | 1 |

Όπου α και β είναι οι τιμές του τοπικού μεγίστου και του τοπικού ελαχίστου αντίστοιχα της συνάρτησης

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 1, x \in \mathbb{R} .$$

α) Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha = 4 \quad \text{και} \quad \beta = 3 .$$

Μονάδες 10

β) Να βρείτε τη μέση τιμή \bar{x} και τη διάμεσο δ των ωρών πρωινής εργασίας των μαθητών.

Μονάδες 10

γ) Πόσοι μαθητές εργάστηκαν το πολύ 4 ώρες.

Μονάδες 5

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 29 ΙΟΥΝΙΟΥ 2005
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1ο

A. Αν η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση, τότε να αποδείξετε ότι $[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$, όπου c σταθερός πραγματικός αριθμός.

Μονάδες 10

B. Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και δίπλα την ένδειξη (Σ), αν αυτή είναι σωστή, ή την ένδειξη (Λ), αν αυτή είναι λανθασμένη.

α) $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$, όπου f, g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις.

Μονάδες 3

β) $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, όπου n φυσικός αριθμός διάφορος του μηδενός και $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 3

γ) $(\sin x)' = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 3

δ) Η διάμεσος ενός δείγματος n παρατηρήσεων δεν είναι μέτρο θέσης.

Μονάδες 3

ε) Σε μία κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το 95% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο

διάστημα $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$, όπου \bar{x} η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

Μονάδες 5

β) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο $f'(x)$ και να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει ρίζες τους αριθμούς 3 και -1.

Μονάδες 10

γ) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f στο διάστημα $(1, +\infty)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι τιμές μιας μεταβλητής X με τις αντίστοιχες συχνότητές τους. Το μέγεθος του δείγματος είναι $n = 80$ και η μέση τιμή είναι $\bar{x} = 2,6$.

| x_i | v_i |
|--------|-----------|
| 1 | 12 |
| 2 | μ |
| 3 | λ |
| 4 | 25 |
| Σύνολο | $n = 80$ |

α) Να αποδείξετε ότι $\mu = 33$ και $\lambda = 10$.

Μονάδες 10

β) Να υπολογίσετε τη διάμεσο του δείγματος.

Μονάδες 6

γ) Να υπολογίσετε τη διακύμανση του δείγματος.

Μονάδες 9

Για τον υπολογισμό της διακύμανσης του δείγματος μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον τύπο:

$$s^2 = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^k x_i^2 v_i - \frac{\left(\sum_{i=1}^k x_i v_i \right)^2}{n} \right]$$

ΘΕΜΑ 4ο

Οι μηνιαίοι μισθοί των υπαλλήλων μιας Αμερικανικής εταιρείας έχουν μέση τιμή $\bar{x}_A = 1.000$ δολάρια και τυπική απόκλιση $s_A = 125$ δολάρια. Οι μισθοί των υπαλλήλων μιας Ευρωπαϊκής εταιρείας έχουν μέση τιμή $\bar{x}_E = 800$ ευρώ και τυπική απόκλιση $s_E = 90$ ευρώ.

α) Να βρείτε ποια από τις δύο εταιρείες έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια μισθών.

Μονάδες 8

β) Η Αμερικανική εταιρεία αποφασίζει να αυξήσει το μηνιαίο μισθό κάθε υπαλλήλου κατά 250 δολάρια.

Επίσης η Ευρωπαϊκή εταιρεία αποφασίζει να αυξήσει το μηνιαίο μισθό κάθε υπαλλήλου κατά 20%.

Να βρείτε τη νέα μέση τιμή και τη νέα τυπική απόκλιση των μηνιαίων μισθών και για τις δύο εταιρείες.

Μονάδες 10

γ) Ποια από τις δύο εταιρείες έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια των μηνιαίων μισθών μετά τις αυξήσεις;

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Τα θέματα **δεν θα τα αντιγράψετε** στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση.**
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μια (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 24 ΜΑΪΟΥ 2006
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΕΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1ο

A) Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$, είναι $f'(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 10

B) Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και δίπλα την ένδειξη (Σ), αν αυτή είναι σωστή, ή την ένδειξη (Λ), αν αυτή είναι λανθασμένη.

α) Έστω f, g πραγματικές συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} , που είναι παραγωγίσιμες σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους. Τότε ισχύει:

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) g'(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 3

β) Η παράγωγος κάθε σταθερής συνάρτησης είναι μηδέν σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

Μονάδες 3

γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $(\eta \mu x)' = -\sigma \nu x$.

Μονάδες 3

δ) Η διάμεσος επηρεάζεται από ακραίες παρατηρήσεις.

Μονάδες 3

- ε) Έστω x_1, x_2, \dots, x_k οι τιμές μιας μεταβλητής X , που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n , $k \leq n$. Για τις αντίστοιχες (απόλυτες) συχνότητες ισχύει:

$$v_1 + v_2 + \dots + v_k = n.$$

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Για τη μελέτη του αριθμού των τροχαίων ατυχημάτων, που γίνονται σε μια κεντρική διασταύρωση κάποιας επαρχιακής πόλης, πήραμε δείγμα πέντε παρατηρήσεων που αφορούν στον αριθμό των ατυχημάτων σε κάθε έναν από τους πέντε τελευταίους μήνες. Οι παρατηρήσεις είναι αντίστοιχα:

1, 2, 3, 3, 1.

- α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διασπορά του δείγματος.

Μονάδες 10

- β) Να βρείτε τη διάμεσο του δείγματος.

Μονάδες 5

- γ) Ποια είναι η (απόλυτη) συχνότητα και ποια η σχετική συχνότητα της τιμής 3;

Μονάδες 5

- δ) Ποιο είναι το εύρος του δείγματος;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω $a \in \mathbb{R}$. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - ax - 8$ με πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών \mathbb{R} .

- I. Να βρεθεί το $a \in \mathbb{R}$ αν γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης διέρχεται από το σημείο $A(1, -2)$.

Μονάδες 5

II. Αν $\alpha = -4$,

α) να βρεθεί η παράγωγος $f'(x)$.

Μονάδες 5

β) να βρεθεί το $x_0 \in \mathbb{R}$ στο οποίο η συνάρτηση $f(x)$ παρουσιάζει ακρότατο. Να βρεθεί αν το ακρότατο είναι μέγιστο ή ελάχιστο.

Μονάδες 10

γ) να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο $A(1,-2)$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Ο χρόνος αναμονής των πολιτών μέχρι να εξυπηρετηθούν σε μια δημόσια υπηρεσία ακολουθεί κανονική κατανομή, με μέση τιμή 5 λεπτά και τυπική απόκλιση 1 λεπτό.

I. Να βρείτε πόσο είναι περίπου το ποσοστό των πολιτών που εξυπηρετούνται σε χρόνο

α) από 4 έως 6 λεπτά.

β) από 3 έως 6 λεπτά.

Μονάδες 10

II. Να βρείτε τη διάμεσο και το εύρος της κατανομής του χρόνου αναμονής των πολιτών.

Μονάδες 10

III. Να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής της κατανομής του χρόνου αναμονής.

Μονάδες 5

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 21 ΜΑΪΟΥ 2007
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1ο

A) Έστω f, g δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο \mathbb{R} . Να αποδείξετε ότι $[f(x)+g(x)]' = f'(x)+g'(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 10

B) Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και δίπλα την ένδειξη (Σ), αν αυτή είναι σωστή, ή την ένδειξη (Λ), αν αυτή είναι λανθασμένη.

α) Το εύρος R ενός δείγματος n παρατηρήσεων δεν επηρεάζεται από τις δύο ακραίες παρατηρήσεις.

Μονάδες 3

β) Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.

Μονάδες 3

γ) Σε ένα ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με 1.

Μονάδες 3

- δ) Έστω f, g δύο οποιεσδήποτε παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο \mathbb{R} , τότε ισχύει:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g'(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 3

- ε) Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$, όταν $f(x) > f(x_1)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1 .

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 + 1$, όπου $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

- α) Το ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης f ως προς x , όταν $x=2$.

Μονάδες 10

- β) Τα ακρότατα της συνάρτησης f .

Μονάδες 10

- γ) Το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης, στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην ευθεία $y=3$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Στον παρακάτω (ελλειπή) πίνακα παρουσιάζονται οι σχετικές συχνότητες των τιμών σε Ευρώ ενός συγκεκριμένου προϊόντος σε 50 καταστήματα μιας πόλης:

| Τιμή προϊόντος (σε Ευρώ) [-) | Σχετική Συχνότητα f_i |
|--------------------------------------|----------------------------|
| 8 - 10 | 0,2 |
| 10 - 12 | f_2 |
| 12 - 14 | 0,3 |
| 14 - 16 | f_4 |

- α) Αν η μέση τιμή των τιμών του προϊόντος στα καταστήματα αυτά είναι $\bar{x} = 11,60$ Ευρώ, να βρείτε τις σχετικές συχνότητες f_2 και f_4 .

Μονάδες 10

- β) Αν $f_2 = 0,4$ και $f_4 = 0,1$ τότε,

- i) να βρείτε σε πόσα καταστήματα η τιμή του προϊόντος είναι μεγαλύτερη ή ίση των 10 Ευρώ.

Μονάδες 8

- ii) να κατασκευάσετε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Σε ένα δείγμα n παρατηρήσεων x_1, x_2, \dots, x_n μιας μεταβλητής X είναι $\bar{x} = 8$ και $s_x^2 = 4$.

- α) Αν y_1, y_2, \dots, y_n είναι το δείγμα των παρατηρήσεων που προκύπτουν αντιστοίχως από τις x_1, x_2, \dots, x_n όταν κάθε μία αυξηθεί κατά 10% τότε:

- i) Να εξετάσετε αν το δείγμα y_1, y_2, \dots, y_n είναι ομοιογενές.

Μονάδες 5

- ii) Να συγκριθούν μεταξύ τους τα δύο δείγματα ως προς την ομοιογένεια.

Μονάδες 5

β) Αν $z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s_x}$ για κάθε $i=1,2,\dots,n$

i) να βρείτε τη μέση τιμή \bar{z} και την τυπική απόκλιση s_z των z_1, \dots, z_n .

Μονάδες 10

ii) να εξετάσετε αν ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής (CV) των z_1, \dots, z_n .

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Δεν θα αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση.
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Κάθε λύση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 29 ΙΟΥΝΙΟΥ 2007
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ 1ο

A. Αν x_1, x_2, \dots, x_n , είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n , $n \leq n$ και f_1, f_2, \dots, f_n οι αντίστοιχες σχετικές συχνότητες των τιμών της μεταβλητής, να αποδείξετε ότι: $f_1 + f_2 + \dots + f_n = 1$.

Μονάδες 8

B. Να δώσετε τον ορισμό της μέσης τιμής ενός δείγματος n παρατηρήσεων μιας μεταβλητής X .

Μονάδες 5

Γ. Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και δίπλα την ένδειξη (Σ), αν αυτή είναι σωστή, ή την ένδειξη (Λ), αν αυτή είναι λανθασμένη.

α) Για $x > 0$ ισχύει $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Μονάδες 3

β) Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση τόσο των ποιοτικών, όσο και των ποσοτικών δεδομένων, όταν οι διαφορετικές τιμές της μεταβλητής είναι σχετικά λίγες.

Μονάδες 3

γ) Οι τιμές μιας ποιοτικής μεταβλητής είναι αριθμοί.

Μονάδες 3

δ) Η διακύμανση των τιμών μιας μεταβλητής X είναι μέτρο θέσης.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και την παράγωγό της.

Μονάδες 10

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .

Μονάδες 10

γ) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf'(x)}{f(x)}$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Οι βαθμοί των μαθητών σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών μιας τάξης ενός Λυκείου ακολουθούν κανονική κατανομή. Το 50% των μαθητών έγραψε τουλάχιστο 13, ενώ το 34% από 13 έως 14:

α) Να βρείτε τη διάμεσο δ , τη μέση τιμή \bar{x} και την τυπική απόκλιση s των βαθμών των μαθητών.

Μονάδες 12

β) Αν 95 μαθητές της τάξης έγραψαν από 11 έως 13:

i. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών της τάξης.

Μονάδες 7

- ii. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών που έγραψαν από 14 έως 15 στο διαγώνισμα αυτό.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^3 - sx^2 + 2x + \bar{x}$, όπου \bar{x} η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση ενός δείγματος n παρατηρήσεων μιας μεταβλητής X . Αν στο σημείο $M(1, 5)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f η εφαπτομένη σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$:

- α) Να βρείτε τη μέση τιμή \bar{x} και την τυπική απόκλιση s του δείγματος.

Μονάδες 15

- β) Αν $\bar{x} = 4$ και $s = 2$, τότε:

- i. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Μονάδες 4

- ii. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της παραγώγου της συνάρτησης f στο $x_0 = 1$.

Μονάδες 6

ΟΛΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Δεν θα αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.**

2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο επάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν.

Δεν επιτρέπεται να γράψετε οποιαδήποτε άλλη σημείωση.

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 21 ΜΑΪΟΥ 2008
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

A) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, τότε να αποδείξετε ότι:
 $[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$, όπου c σταθερός πραγματικός αριθμός.

Μονάδες 8

B) Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

Γ) Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και δίπλα την ένδειξη (**Σ**), αν αυτή είναι σωστή, ή την ένδειξη (**Λ**), αν αυτή είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $(\sin x)' = \eta \mu x$.

Μονάδες 3

β) Οι ποσοτικές μεταβλητές διακρίνονται σε διακριτές και συνεχείς μεταβλητές.

Μονάδες 3

γ) Διάμεσος (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση, όταν το n είναι άρτιος αριθμός, ή ο μέσος όρος (ημιάθροισμα) των δύο μεσαίων παρατηρήσεων, όταν το n είναι περιττός αριθμός.

Μονάδες 3

- δ) Το εύρος R ενός δείγματος n παρατηρήσεων είναι μέτρο θέσης.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + kx + 2$, με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} και $k \in \mathbb{R}$.

- A) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(3,8)$, να βρείτε τον k .

Μονάδες 5

- B) Για $k=-1$

- α) Να αποδείξετε ότι: $f'(x) + f''(x) + 2 = (x+1)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 10

- β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f .

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 3ο

Στο παρακάτω δείγμα των 10 παρατηρήσεων:

1, 2, 4, 2, 6, 1, 3, 6, α , 6

όπου α πραγματικός αριθμός,

η μέση τιμή είναι $\bar{x} = 4$.

- A) Να βρείτε την τιμή του α .

Μονάδες 5

- B) Για $\alpha=9$

- α) Να βρείτε τη διάμεσο.

Μονάδες 7

- β) Να βρείτε τη διακύμανση.

Μονάδες 8

- γ) Αν όλες οι παραπάνω παρατηρήσεις αυξηθούν κατά 2008, τότε ποια θα είναι η μέση τιμή των νέων παρατηρήσεων;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 4ο

Σε ένα κυκλικό διάγραμμα παριστάνεται η βαθμολογία των 150 μαθητών ενός Λυκείου σε τέσσερις κατηγορίες: «Άριστα», «Λίαν καλώς», «Καλώς» και «Σχεδόν καλώς». Το 20% των μαθητών έχουν επίδοση «Λίαν καλώς». Η γωνία του κυκλικού τομέα για την επίδοση «Άριστα» είναι 36°. Οι μαθητές με βαθμό «Καλώς» είναι τετραπλάσιοι των μαθητών με «Άριστα».

- α) Να μεταφέρετε τον παρακάτω πίνακα στο τετράδιό σας και να τον συμπληρώσετε.

| i | Χαρακτηρισμός βαθμολογίας x_i | Συχνότητα v_i | Σχετική συχνότητα f_i | Σχετική συχνότητα % f_i% | Γωνία κυκλ. τομέα σε μοίρες α_i |
|----------|--|--|--|---|--|
| 1 | Άριστα | | | | |
| 2 | Λίαν καλώς | | | | |
| 3 | Καλώς | | | | |
| 4 | Σχεδόν καλώς | | | | |
| | Σύνολο | | | | |

Μονάδες 16

- β) Να σχεδιάσετε στο τετράδιό σας το ραβδόγραμμα των σχετικών συχνοτήτων (f_i%).

Μονάδες 9

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 19 ΜΑΪΟΥ 2009
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

A. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$ είναι η $f'(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 10

B. Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και δίπλα την ένδειξη (Σ), αν αυτή είναι σωστή, ή την ένδειξη (Λ), αν αυτή είναι λανθασμένη.

α. Για το πηλίκο δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων f, g ισχύει ότι

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g'(x) - f(x)g''(x)}{(g(x))^2}.$$

Μονάδες 3

β. Αν για τις συναρτήσεις f και g ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2, \quad \text{όπου} \quad l_1, l_2 \in \mathbb{R}, \quad \text{τότε}$$

$$\text{ισχύει} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = l_1 \cdot l_2.$$

Μονάδες 3

γ. Το διάγραμμα συχνοτήτων χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποσοτικής μεταβλητής.

Μονάδες 3

- δ. Το εύρος ενός δείγματος n παρατηρήσεων είναι μέτρο διασποράς.

Μονάδες 3

- ε. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης που είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f στο σημείο της $(x_0, f(x_0))$ είναι ο αριθμός $f'(x_0)$.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2ο

Στον επόμενο πίνακα δίνονται οι τιμές x_i , $i=1,2,3,4$ μιας μεταβλητής X με τις αντίστοιχες συχνότητες τους v_i , $i=1,2,3,4$.

| x_i | v_i |
|-------|-------|
| 1 | 1 |
| 3 | 2 |
| 5 | 1 |
| 7 | 4 |

Να υπολογίσετε:

- α. τη μέση τιμή \bar{x} ,

Μονάδες 8

- β. τη διάμεσο δ ,

Μονάδες 8

- γ. τη διακύμανση s^2 .

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

- α. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο $f'(x)$.

Μονάδες 5

β. Να προσδιορίσετε το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα και το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε τα ακρότατα της f .

Μονάδες 5

δ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(-1, f(-1))$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Η ηλικία των κατοίκων μιας πόλης ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 50 έτη και τυπική απόκλιση 15 έτη.

α. Να βρείτε τη διάμεσο της κατανομής της ηλικίας των κατοίκων.

Μονάδες 4

β. Να βρείτε τον συντελεστή μεταβολής και να εξετάσετε αν το δείγμα των ηλικιών είναι ομοιογενές.

Μονάδες 8

γ. Αν ο αριθμός των κατοίκων της πόλης είναι 4000, να βρείτε πόσοι περίπου κάτοικοι είναι ηλικίας

(i) μεταξύ 35 και 65 ετών,

Μονάδες 6

(ii) μεταξύ 5 και 35 ετών.

Μονάδες 7

**ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ' ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ
ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')**
ΤΡΙΤΗ 18 ΜΑΪΟΥ 2010
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$ είναι $f'(x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 10

A2. Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής;

Μονάδες 5

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, όπου ℓ

πραγματικός αριθμός, τότε ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow x_0} (kf(x)) = k\ell$,

για κάθε πραγματικό αριθμό k .

β. Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποσοτικής μεταβλητής.

γ. Για το γινόμενο δύο οποιονδήποτε παραγωγίσιμων συναρτήσεων f, g ισχύει ότι:

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) - f(x)g'(x)$$

- δ. Το άθροισμα όλων των σχετικών συχνοτήτων των τιμών μιας μεταβλητής X είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος.
- ε. Πλάτος μιας κλάσης ονομάζεται η διαφορά του κατώτερου από το ανώτερο όριο της κλάσης.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται η κατανομή συχνοτήτων των ωρών μελέτης των μαθητών της Α΄ τάξης ενός Εσπερινού Γενικού Λυκείου στη διάρκεια μιας εβδομάδας.

| Ώρες x_i | Συχνότητα v_i |
|---------------|--------------------|
| 2 | 10 |
| 3 | α |
| 4 | 10 |
| 5 | 10 |
| 6 | 20 |

- B1.** Αν η διάμεσος του δείγματος είναι $\delta=3,5$ να βρείτε την τιμή του α .

Μονάδες 8

- B2.** Για $\alpha=30$, να βρείτε τη μέση τιμή \bar{x} των ωρών μελέτης των μαθητών.

Μονάδες 7

- B3.** Για $\alpha=30$, να βρείτε τη διακύμανση s^2 των ωρών μελέτης των μαθητών.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + ax^2 - 9x + \beta$, όπου a, β πραγματικοί αριθμοί.

Γ1. Αν η εφαπτομένη στο σημείο $M(2,5)$ της γραφικής παράστασης της f έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με 15, να αποδείξετε ότι $a = \beta = 3$.

Μονάδες 10

Γ2. Για $a = \beta = 3$, να βρείτε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f'(x) + 9}{x^2 - 4}$$

Μονάδες 5

Γ3. Για $a = \beta = 3$, να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $g(x) = f'(x) + 10$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Μια μεταβλητή X παίρνει τις τιμές $x_1 = a$, $x_2 = a + 5$, $x_3 = a + 10$ και $x_4 = a + 35$, όπου a πραγματικός αριθμός. Οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες των τιμών δίνονται από τον τύπο:

$$F_i = \frac{7i - 3}{\lambda}, \text{ για } i = 1, 2, 3, 4,$$

όπου λ θετικός ακέραιος.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\lambda = 25$.

Μονάδες 7

Δ2. Να βρείτε τις σχετικές συχνότητες f_1, f_2, f_3 και f_4 .

Μονάδες 8

Δ3. Αν η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι $\bar{x} = 19$, να βρείτε την τιμή του a .

Μονάδες 10

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Δ΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Δ΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΣΑΒΒΑΤΟ 14 ΜΑΪΟΥ 2011

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω f, g δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο \mathbb{R} . Να αποδείξετε ότι $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$.

Μονάδες 7

A2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο $x_1 \in A$;

Μονάδες 4

A3. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η διακύμανση εκφράζεται στις ίδιες μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.

Μονάδες 2

β) Σε μία κανονική κατανομή το εύρος ισούται περίπου με έξι φορές τη μέση τιμή, δηλαδή $R \approx 6\bar{x}$.

Μονάδες 2

γ) Για την παράγωγο μίας σύνθετης συνάρτησης ισχύει $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Μονάδες 2

- δ) Πάντοτε ένα μεγαλύτερο δείγμα δίνει πιο αξιόπιστα αποτελέσματα από ένα μικρότερο δείγμα.

Μονάδες 2

- ε) Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής είναι ομοιογενές, αν ο συντελεστής μεταβλητότητας δεν ξεπερνά το 10%.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = -x^3 - 3x + 4, \quad x \in \mathbb{R}$$

- B1.** Να δείξετε ότι η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} .

Μονάδες 6

- B2.** Να δείξετε ότι η παράγωγος $f'(x)$ έχει ολικό μέγιστο και να το υπολογίσετε.

Μονάδες 7

- B3.** Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(1, f(1))$.

Μονάδες 6

- B4.** Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 4}{x}$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2 - kx + 5, \quad k \in \mathbb{R}$$

- Γ1.** Να βρεθεί το $k \in \mathbb{R}$ αν γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(-1, 12)$.

Μονάδες 5

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Δ΄ ΕΣΠΕΡΙΩΝ

Γ2. Για $\kappa=6$ να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στα σημεία με τετμημένες $x=2$ και $x=4$.

Μονάδες 10

Γ3. Να αποδειχθεί ότι το σημείο τομής των εφαπτομένων βρίσκεται πάνω στην ευθεία $x=3$.

Μονάδες 5

Γ4. Να βρεθεί το εμβαδό του τριγώνου ανάμεσα στις εφαπτόμενες και τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Οι πωλήσεις, σε χιλιάδες ευρώ, που έγιναν από τους πωλητές μιας εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους ομαδοποιήθηκαν σε πίνακα συχνοτήτων με κλάσεις ίσου πλάτους. Το αντίστοιχο πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων $f_i\%$ έχει διαδοχικές κορυφές τις:

A(8, 0) B(10, 10) Γ(12, 20) Δ(14, y_Δ)

E(16, y_E) Z(18, 10) H(20, 0)

όπου y_Δ, y_E οι τεταγμένες των κορυφών Δ και Ε του πολυγώνου ΑΒΓΔΕΖΗ.

Δ1. Να υπολογιστούν οι τεταγμένες y_Δ και y_E των κορυφών Δ και Ε, αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή των πωλήσεων στη διάρκεια του έτους είναι 14200 ευρώ και το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ είναι παράλληλο προς τον οριζόντιο άξονα.

Μονάδες 7

Δ2. Να σχεδιαστεί το πολύγωνο των σχετικών συχνοτήτων $f_i\%$.

Μονάδες 3

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Δ΄ ΕΣΠΕΡΙΩΝ

Δ3. Να κατασκευαστεί ο πίνακας των σχετικών συχνοτήτων $f_i\%$ της κατανομής των πωλήσεων που έγιναν από τους πωλητές της εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους.

Μονάδες 7

Δ4. Η διεύθυνση της εταιρείας αποφάσισε τη χορήγηση ενός επιπλέον εφάπαξ ποσού σε όσους πωλητές έχουν κάνει ετήσιες πωλήσεις τουλάχιστον 15000 ευρώ. Να υπολογιστεί το ποσοστό των πωλητών που θα λάβουν αυτό το ποσό.

Μονάδες 4

Δ5. Το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων της κατανομής των πωλήσεων οι οποίες έγιναν από τους πωλητές της εταιρείας κατά τη διάρκεια ενός έτους και του οριζόντιου άξονα είναι 80. Να βρείτε τον αριθμό των πωλητών που δικαιούνται το εφάπαξ ποσό που αναφέρεται στο Δ4 ερώτημα.

Μονάδες 4

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.30 π.μ.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Δ΄ ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΑΒΒΑΤΟ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2011

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω x_1, x_2, \dots, x_k οι τιμές μίας μεταβλητής X που αφορούν τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n , $k \leq n$ και f_1, f_2, \dots, f_k οι σχετικές τους συχνότητες αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $0 \leq f_i \leq 1$, για κάθε $i=1, 2, \dots, k$

β) $f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$

Μονάδες 7

A2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο πεδίο ορισμού της A ;

Μονάδες 4

A3. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της A ;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $x > 0$, τότε $(\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}}$

β) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε

εσωτερικό σημείο Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

- γ)** Η αθροιστική συχνότητα N_i μιας κατανομής εκφράζει το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή ίσες της τιμής x_i .
- δ)** Στην κανονική κατανομή το 95% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$, όπου \bar{x} η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση.
- ε)** Η διάμεσος (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται πάντα ως η μεσαία παρατήρηση.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2 - \frac{\kappa}{x}$, $\kappa \in \mathbb{P}$, $x \neq 0$.

B1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g με $g(x) = xf'(x) + f(x)$ είναι σταθερή.

Μονάδες 6

B2. Να υπολογισθεί η τιμή του κ , αν γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(3, 1)$.

Μονάδες 6

Για $\kappa = 3$:

B3. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $B(1, f(1))$ της γραφικής παράστασης της f .

Μονάδες 7

B4. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του τριγώνου που έχει κορυφές: την αρχή των αξόνων και τα σημεία στα οποία η εφαπτομένη του

ερωτήματος Β3, τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Υποθέτουμε ότι οι θερμοκρασίες (σε $^{\circ}\text{C}$) σε μία περιοχή κατά τη διάρκεια ενός 24ώρου προσεγγίζονται από τις τιμές της συνάρτησης $\theta(t) = t - 4\sqrt{t} + \alpha$, όπου $\alpha \in \mathbb{P}$ και $t \in (0, 24]$ ο χρόνος σε ώρες.

Γ1. Να αποδείξετε ότι για $t \in (0, 4]$ η θερμοκρασία μειώνεται και για $t \in (4, 24]$ η θερμοκρασία αυξάνεται.

Μονάδες 7

Γ2. Να υπολογίσετε την τιμή του α αν γνωρίζετε ότι η ελάχιστη θερμοκρασία της περιοχής εντός του 24ώρου είναι -1°C .

Μονάδες 6

Γ3. Για $\alpha = 3$ να βρείτε τις ώρες που η θερμοκρασία της περιοχής είναι 0°C .

Μονάδες 5

Γ4. Να υπολογίσετε το $\lim_{t \rightarrow 4} \frac{\theta'(t)}{t^2 - 16}$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Οι ηλικίες των εργαζομένων σε μια εταιρεία έχουν ομαδοποιηθεί σε 4 κλάσεις ίσου πλάτους, όπως εμφανίζονται στον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων.

| ΗΛΙΚΙΕΣ (χρόνια) | x_i | v_i | $f_i \%$ | N_i | $F_i \%$ | $v_i x_i$ |
|-------------------------|-------|-------|----------|-------|----------|-----------|
| [25,) | | | x | | | |
| [,) | | | $x+20$ | | | |
| [,) | | | $2x$ | | | |
| [,) | | | x^2-6x | 50 | | |
| ΣΥΝΟΛΟ | | | | | | |

Δ1. Να βρεθούν οι σχετικές συχνότητες $f_i \%$ $i=1, 2, 3, 4$

Μονάδες 6

Δ2. Αν η διάμεσος της κατανομής των ηλικιών είναι $\delta=50$ χρόνια, να αποδείξετε ότι το πλάτος της κλάσης είναι $c=10$.

Μονάδες 8

Δ3. Αφού μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα συμπληρωμένο κατάλληλα, να υπολογίσετε την μέση τιμή \bar{x} των ηλικιών.

Μονάδες 6

Δ4. Πόσοι εργαζόμενοι, των οποίων οι ηλικίες ανήκουν στην πρώτη κλάση, πρέπει να προσληφθούν, ώστε η νέα μέση ηλικία να είναι 40 χρόνια;

Μονάδες 5