2-6-2001

Γ΄ ΤΑΞΗ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2. Να αποδείξετε ότι: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$. ΘΕΩΡΙΑ ΒΙΒΛΙΟ ΣΕΛ 98

Μονάδες 7,5

Α.2. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

Για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει:

α. $|z|^2 = z\bar{z}$ Σ

β. $|z^2| = z^2$ Λ

γ. $|z| = -|\bar{z}|$ Λ

δ. $|z| = |\bar{z}|$ Σ

ε. $|i\bar{z}| = |z|$ Σ

Μονάδες 5

Β.1. Αν $z_1 = 3 + 4i$ και $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$, να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε αριθμό το γράμμα της **Στήλης Β** έτσι, ώστε να προκύπτει ισότητα.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. $\lvert z_1 \cdot z_2\rvert$ ζ	**α.** 4
2. $\lvert z_1^2\rvert$ γ	**β.** 2
3. $\lvert z_2\rvert^2$ α	**γ.** 25
4. $-\lvert\bar{z}_1\rvert$ δ	**δ.** −5
5. $\lvert i z_2\rvert$ β	**ε.** −2
	στ. 5
	ζ. 10

Μονάδες 7,5

Β.2. Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|z|=1$, να δείξετε ότι $\bar{z}=\frac{1}{z}$.

Μονάδες 5

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

$|z|=1 \Leftrightarrow z \neq 0$. $|z|=1 \Leftrightarrow |z|^2=1 \Leftrightarrow z\bar{z}=1 \Leftrightarrow \bar{z}=\frac{1}{z}$

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω f μια πραγματική συνάρτηση με τύπο:

$$f(x)=\begin{cases} \alpha x^2, & x \leq 3 \\ \dfrac{1-e^{x-3}}{x-3}, & x>3 \end{cases}$$

α. Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι α = –1/9.

Μονάδες 9

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο A(4, f(4)).

Μονάδες 7

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=1 και x=2.

Μονάδες 9

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\alpha x^2=9\alpha$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}\frac{1-e^{x-3}}{x-3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 3^+}\frac{-e^{x-3}}{1}=-1$$

$$f(3)=9\alpha$$

Αφού f συνεχής στο $x_0=3$ πρέπει $9\alpha=-1 \Leftrightarrow \alpha=-\frac{1}{9}$

Β) Για x>3 έχουμε:

$$f'(x)=\left(\frac{1-e^{x-3}}{x-3}\right)'=\frac{-e^{x-3}\cdot(x-3)-\left(1-e^{x-3}\right)\cdot 1}{(x-3)^2}=\ldots=\frac{e^{x-3}\cdot(4-x)-1}{(x-3)^2}$$

$f'(4)=\frac{e^1\cdot 0-1}{1^2}=-1$. $f(4)=\frac{1-e^1}{1}=1-e$. Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y-f(4)=f'(4)\cdot(x-4)\Leftrightarrow y-(1-e)=-1(x-4)\Leftrightarrow y=-x-e+5$$

Γ) Για $x\in[1,2]$ έχουμε $f(x)=-\frac{1}{9}x^2<0$. Άρα

$$E=-\int_1^2\left(-\frac{1}{9}x^2\right)dx=\frac{1}{9}\cdot\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2=\frac{1}{27}(8-1)=\frac{7}{27}\tau.\mu.$$

ΘΕΜΑ 3ο

Για μια συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών R, ισχύει ότι:

$$f^3(x)+\beta f^2(x)+\gamma f(x)=x^3-2x^2+6x-1 \quad \text{για κάθε } x\in R,$$

όπου β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\beta^2<3\gamma$.

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

Μονάδες 10

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 8

γ. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης f(x) = 0 στο ανοικτό διάστημα (0,1).

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Α) Παραγωγίζοντας τα δύο μέλη της δοθείσας έχουμε:

$$3f^2(x)\cdot f'(x)+2\beta f(x)\cdot f'(x)+\gamma f'(x)=3x^2-4x+6\Leftrightarrow$$

$$f'(x)\cdot\left(3f^2(x)+2\beta f(x)+\gamma\right)=3x^2-4x+6. \quad (1)$$

Θεωρώντας το τριώνυμο

$3f^2(x)+2\beta f(x)+\gamma,\ \Delta=4\beta^2-12\gamma=4(\beta^2-3\gamma)<0$, λόγω της δοθείσης.

Άρα $3f^2(x)+2\beta f(x)+\gamma>0$ για κάθε f(x). Οπότε $f'(x)=\frac{3x^2-4x+6}{3f^2(x)+2\beta f(x)+\gamma}$. Το

$3x^2-4x+6>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ διότι η διακρίνουσά του είναι αρνητική οπότε $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και από FERMAT η f δεν παρουσιάζει ακρότατο.

B) Από προηγούμενο η f΄(x)>0 άρα f γνήσια αύξουσα.

Γ) Η δοθείσα γίνεται

για x=0: $f(0)\cdot\left[f^2(0)+\beta f(0)+\gamma\right]=-1 \Leftrightarrow f(0)<0$

για x=1: $f(1)\cdot\left[f^2(1)+\beta f(1)+\gamma\right]=4 \Leftrightarrow f(1)>0$

Διότι τα τριώνυμα στις αγκύλες είναι θετικά λόγω του ότι η διακρίνουσά τους $\Delta=\beta^2-4\gamma<0$. Πράγματι είναι $0<\beta^2<3\gamma$ δηλαδή $\gamma>0$ οπότε $\beta^2-3\gamma-\gamma<0 \Leftrightarrow \beta^2-4\gamma<0$.

Η f λοιπόν ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ. Bolzano στο [0,1] οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,1)$ με $f(x_0)=0$ και επειδή η f γνήσια αύξουσα η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω μια πραγματική συνάρτηση f, συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών R, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

i) $f(x)\neq 0$, για κάθε $x\in R$

ii) $f(x) = 1-2x^2\int_0^1 t f^2(xt)\,dt$, για κάθε $x\in R$.

Έστω ακόμη g η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο

$$g(x)=\frac{1}{f(x)}-x^2 \quad , \quad \text{για κάθε } x\in R.$$

α. Να δείξετε ότι ισχύει $f'(x)=-2xf^2(x)$

Μονάδες 10

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή.

Μονάδες 4

γ. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι:

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}\ .$$

Μονάδες 4

δ. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}$ (x f(x) ημ2x).

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

A) $f(x)=1-2\int_0^1 x^2\cdot t\cdot f^2(xt)dt=1-2\int_0^1 x\cdot(xt)\cdot f^2(xt)dt$ θέτουμε u=g(t)=xt οπότε du=xdt, $u_1=g(0)=0$, $u_2=g(1)=x$ και η f(x) γίνεται: $f(x)=1-2\int_0^x u\cdot f^2(u)du$. Η f συνεχής άρα η συνάρτηση ολοκλήρωμα στο 2^o μέλος, άρα και η f είναι παραγωγίσιμη. Έχουμε λοιπόν $f'(x) = -2xf^2(x)$.

Β) $g'(x) = \dfrac{-f'(x)}{f^2(x)} - 2x = \dfrac{2xf^2(x) - 2xf^2(x)}{f^2(x)} = 0$ άρα g(x) σταθερή.

Γ) Από τα (α) ερώτημα έχουμε:

$$f'(x) = -2xf^2(x) \overset{f(x)\neq 0}{\Longleftrightarrow} \frac{-f'(x)}{f^2(x)} = 2x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \left(x^2\right)' \Leftrightarrow \frac{1}{f(x)} = x^2 + c$$

Από την υπόθεση έχουμε $f(0) = 1 - 2\cdot 0^2 \cdot \int_0^1 tf^2(0)dt = 1 - 0 = 1$ έτσι

$\dfrac{1}{f(0)} = 0 + c \Leftrightarrow c = 1$, και τελικά $\dfrac{1}{f(x)} = x^2 + 1 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$

Δ) $L = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x \cdot \dfrac{1}{x^2+1} \cdot \eta\mu 2x\right)$. Για x>0 θέτοντας $g(x) = \dfrac{x}{x^2+1} \cdot \eta\mu 2x$ έχουμε:

$$|g(x)| = \left|\frac{x}{x^2+1} \cdot \eta\mu 2x\right| \leq \left|\frac{x}{x^2+1}\right| \overset{x>0}{=} \frac{x}{x^2+1} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow -\dfrac{x}{x^2+1} \leq g(x) \leq \dfrac{x}{x^2+1}$ και επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{x}{x^2+1}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^2+1} = 0$ από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε L=0.

Γεώργιος Δ. Παλτεζανάκης