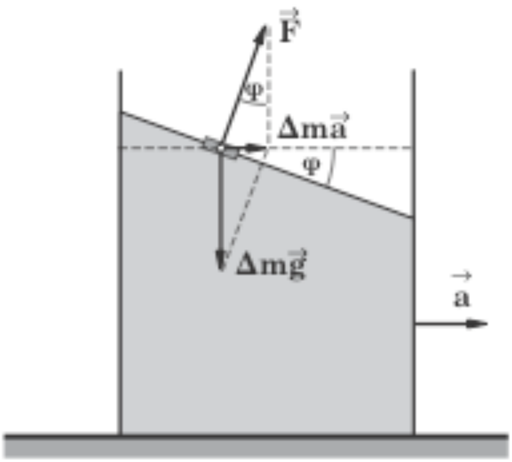
**Ανοιχτό δοχείο, στο οποίο περιέχεται υγρό, κινείται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο με σταθερή επιτάχυνση $\vec{a}$. Μέσα στο υγρό υπάρχει μικρό σφαιρίδιο από φελλό, του οποίου η πυκνότητα $d_φ$ είναι μικρότερη από την πυκνότητα $d_ν$ του νερού.**

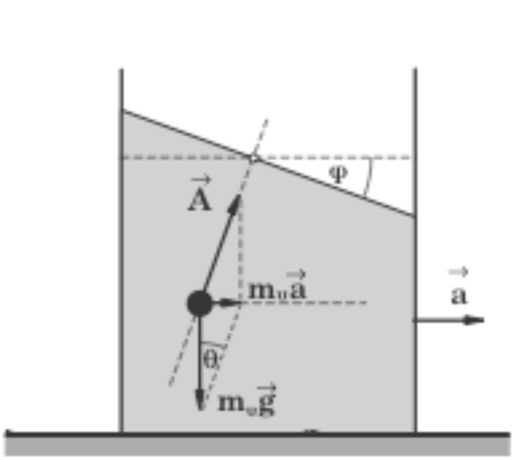
**i) Να δείξετε ότι, ο φορέας της άνωσης που δέχεται το σφαιρίδιο από το νερό είναι κάθετος στην ελεύθερη επιφάνεια του νερού.**

**ii) Να εξετάσετε την κίνηση του σφαιριδίου στο σύστημα αναφοράς του εδάφους και στο σύστημα αναφοράς του δοχείου. Να δεχθείτε ότι την χρονική στιγμή t=0 το σφαιρίδιο βρίσκεται στην κοινή άρχή Ο των αξόνων των δύο συστημάτων και έχει μηδενική ταχύτητα ως προς τα δύο αυτά συστήματα. Δίνεται η επιτάχυνση $\vec{g}$ της βαρύτητας.**

**ΛΥΣΗ: i)** Θεωρούμε ένα τυχαίο στοιχειώδες τμήμα της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού, πολύ μικρού πάχους και μάζας Δm. Το τμήμα αυτό δέχεται το βάρος του $\Delta m\vec{g}$ και τη δύναμη $\vec{F}$ από την μάζα του υγρού που το περιβάλλει, της οποίας ο φορέας είναι κάθετος στην ελεύθερη επιφάνεια του τμήματος (σχ. α). Σύμφωνα με το δεύτερο νόμο κίνησης του Νεύτωνα, η συνισταμένη των δύο αυτών δυνάμεων πρέπει να είναι ίση με $\Delta m\vec{a}$, που σημαίνει ότι ο φορέας της να είναι οριζόντιος, το δε μέτρο της ίσο με Δma. Από το ορθογώνιο τρίγωνο που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{F}$ και $\Delta m\vec{a}$, παίρνουμε για τη γωνία φ τη σχέση:




Σχήμα α.




Σχήμα β.

$$εφφ = \Delta m a/\Delta m g = a/g \qquad (1)$$

Όμως η γωνία φ είναι ίση με την γωνία κλίσεως του στοιχειώδους επιφανειακού τμήματος του υγρού, ως προς την οριζόντια διεύθυνση, δηλαδή όλα τα στοιχειώδη τμήματα της ελεύθερης επιφάνειας του υγρού έχουν την ίδια κλίση φ ως προς την οριζόντια διεύθυνση, που σημαίνει ότι η ελεύθερη επιφάνεια του επιταχυνόμενου υγρού είναι επίπεδη, αλλά μη οριζόντια.

**Εξάλλου, για να υπολογίσουμε την άνωση $\vec{A}$ που δέχεται το σφαιρίδιο του φελλού από το υγρό, πρέπει να παρατηρήσουμε ότι, αυτή**

**είναι δύναμη επαφής εξαρτώμενη από τη φύση του υγρού, από την κινητική του κατάσταση και από τον όγκο του σφαιριδίου. Αν λοιπον στη θέση του σφαιριδίου θεωρήσουμε τη μάζα του υγρού που εκτοπίζει το σφαιρίδιο, τότε η μάζα αυτή θα δέχεται από την υπόλοιπη μάζα του υγρού δύναμη ίση με $\vec{A}$.**

Όμως η εκτοπιζόμενη από το σφαιρίδιο μάζα $m_υ$ του υγρού έχει ως προς το ακίνητο έδαφος επιτάχυνση $\vec{a}$, που σημαίνει ότι η δύναμη $\vec{A}$ αναλύεται σε μια κατακόρυφη συνιστώσα $\vec{A}_ψ$ που εξουδετερώνει το βάρος της $m_υ\vec{g}$ και σε μια οριζόντια συνιστώσα $\vec{A}_x$ που είναι ίση με $m_υ\vec{a}$ (σχ. β). Έτσι θα ισχύουν οι σχέσεις:

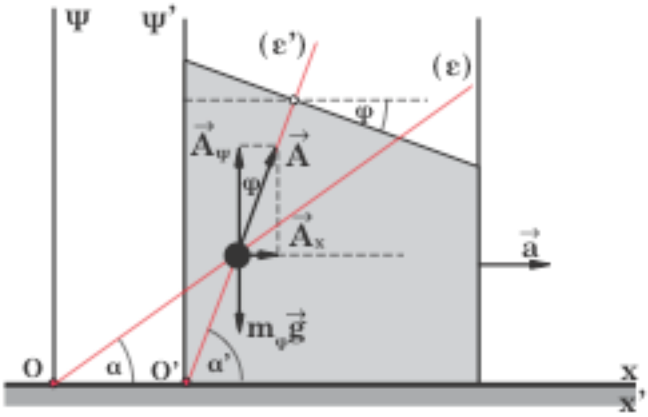
$$\left.\begin{aligned} A_ψ &= m_υ g \\ A_x &= m_υ a \end{aligned}\right\} \xRightarrow{(:)} \frac{A_x}{A_ψ} = \frac{m_υ a}{m_υ g} \Rightarrow εφθ = \frac{a}{g} \qquad (2)$$

όπου θ η γωνία που σχηματίζει ο φορέας της $\vec{A}$ με την κατακόρυφη διεύ θυνση. Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1) και (2) παίρνουμε φ=θ, που σημαίνει ότι, ο φορέας της $\vec{A}$ είναι κάθετος στην ελεύθερη επιφάνεια του υγρού.

**Παρατηρούμε λοιπόν ότι στο σύστημα αναφόρας του εδάφους ο φορέας της άνωσης δεν είναι κατακόρυφος και το γεγονός αυτό οφείλεται στην επιτάχυνση του υγρού.**

**ii)** Εξετάζοντας το σφαιρίδιο του φελλού στο σύστημα αναφοράς του εδάφους διαπιστώνουμε ότι κατα τον οριζόντιο άξονα Ox δέχεται την αντί στοιχη συνιστώσα $\vec{A}_x$ της άνωσης $\vec{A}$ της οποίας το μέτρο είναι:

$$A_x = Vρ_υ a \qquad (3)$$




**Σχήμα γ.**

όπου V ο όγκος του σφαιριδίου. Σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο της κίνησης του Νεύτωνα η αντίστοιχη επιτάχυνση του σφαιριδίου θα έχει μέτρο:

$$a_x = \frac{A_x}{m_φ} \xRightarrow{(3)} a_x = \frac{Vρ_υ a}{Vρ_φ} = \frac{ρ_υ}{ρ_φ} a \qquad (4)$$

δηλαδή κατά τον άξονα Οx το σφαιρίδιο επιταχύνεται ομαλά και η μετατό πισή του σε χρόνο t είναι:

$$\mathbf{x = \frac{a_x t^2}{2} \overset{(4)}{\Rightarrow} x = \frac{\rho_\upsilon a}{2\rho_\varphi} t^2} \tag{5}$$

Εξάλλου κατα τον κατακόρυφο άξονα Οψ το σφαιρίδιο δέχεται την αντί στοιχη συνιστώσα $\vec{\mathbf{A}}_\psi$ της άνωσης $\vec{\mathbf{A}}$ και το βάρος του $\mathbf{m_\varphi \vec{g}}$. Επειδή ισχύει $d_\varphi<d_\upsilon$ θα είναι και $Vd_\varphi g<Vd_\upsilon g$, που σημαίνει ότι $A_\psi>mg_\varphi$ δήλαδη η επιτάχυν ση $\vec{\mathbf{a}}_\psi$ του σφαιριδίου κατά τον άξονα Οψ κατευθύνεται προς τα πάνω και το μέτρο της είναι:

$$\mathbf{a_\psi = \frac{A_\psi - m_\varphi g}{m_\varphi} \Rightarrow a_\psi = \frac{V\rho_\upsilon g - V\rho_\varphi g}{V\rho_\varphi} = \left(\frac{\rho_\upsilon}{\rho_\varphi} - 1\right) g} \tag{6}$$

δηλαδή και κατά τον άξονα Οψ το σφαιρίδιο επιταχύνεται ομαλά η δε αντί στοιχη μετατόπισή του σε χρόνο t είναι:

$$\mathbf{\psi = \frac{a_\psi t^2}{2} \overset{(6)}{\Rightarrow} \psi = \left(\frac{\rho_\upsilon}{\rho_\varphi} - 1\right)\frac{g}{2} t^2} \tag{7}$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (6) και (5) παίρνουμε:

$$\mathbf{\frac{\psi}{x} = \frac{g}{a}\left(\frac{\rho_\upsilon}{\rho_\varphi} - 1\right) / \frac{\rho_\upsilon}{\rho_\varphi} \Rightarrow \psi = \frac{g}{a}\left(1 - \frac{\rho_\varphi}{\rho_\upsilon}\right) x} \tag{8}$$

Από την (8) προκύπτει ότι η τροχιά του σφαιριδίου στο σύστημα αναφοράς του εδάφους είναι η ευθεία γραμμή (ε) με κλίση $(g/a)(1-\rho_\varphi/\rho_\upsilon)$.

Εξάλλου στο σύστημα αναφοράς του δοχείου το σφαιρίδιο έχει κατά μεν τον οριζόντιο άξονα O'x' επιτάχυνση $\vec{\mathbf{a}}'_x$ με μέτρο:

$$\mathbf{a'_x = a_x - a \overset{(4)}{\Rightarrow} a'_x = \frac{\rho_\upsilon}{\rho_\varphi} a - a = \left(\frac{\rho_\upsilon}{\rho_\varphi} - 1\right) a} \tag{9}$$

κατά δε τον κατακόρυφο άξονα O'ψ' επιτάχυνση $\vec{\mathbf{a}}'_\psi$ με μέτρο:

$$\mathbf{a'_\psi = a_\psi \overset{(6)}{\Rightarrow} a_\psi' = \left(\frac{\rho_\upsilon}{\rho_\varphi} - 1\right) g}$$

Οι μετατοπίσεις x', ψ' του σφαιριδίου σε χρόνο t θα είναι:

$$\mathbf{x' = \frac{a'_x t^2}{2} = \left(\frac{\rho_\upsilon}{\rho_\varphi} - 1\right)\frac{a}{2} t^2} \quad \text{και} \quad \mathbf{\psi' = \frac{a'_\psi t^2}{2} = \left(\frac{\rho_\upsilon}{\rho_\varphi} - 1\right)\frac{g}{2} t^2}$$

από τις οποίες με διαίρεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$\frac{\psi'}{x'} = \frac{g}{a} \Rightarrow \psi' = \frac{g}{a}x'$$

δηλαδή η τροχιά του σφαιριδίου στο σύστημα αναφοράς του δοχείου είναι η ευθεία (ε') που διευθύνεται κάθετα προς την ε΄λεύθερη επιφάνεια του υγρου.