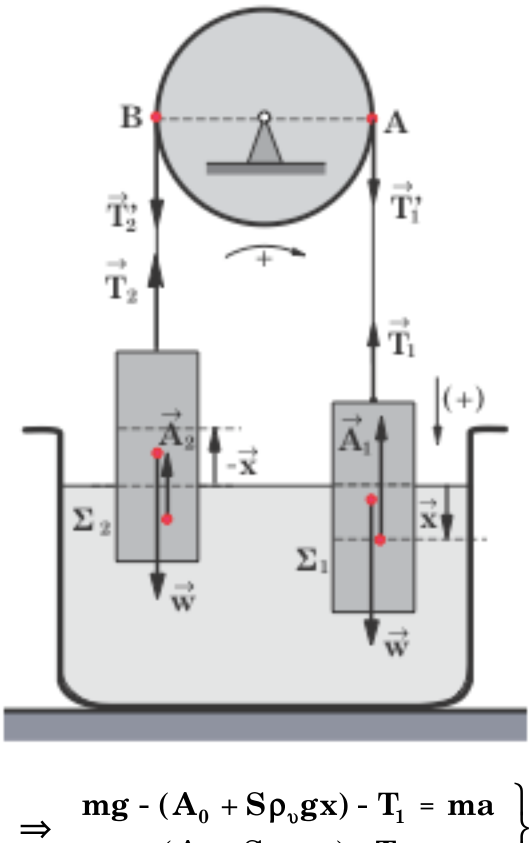
Τα κυλινδρικά σώματα του σχήματος είναι επακριβώς όμοια, το δε νήμα που περιβάλλει τον λαιμό της σταθερής τροχαλίας είναι αβαρές και δεν μπορεί να ολισθαίνει κατά μήκος αυτού. Το σύστημα ισορροπεί με τα σώματα βυθισμένα μερικώς εντός υγρού πυκνότητας ρ_υ. Εκτρέπουμε τον ένα κύλινδρο κατακόρυφα προς τα κάτω κατα x_0 και τον αφήνουμε ελεύθερο, οπότε το σύστημα τίθεται σε κίνηση. Με την προυπόθεση ότι η αρχική εκτροπή εξασφαλίζει ότι κάθε κύλινδρος δεν εξέρχεται ποτέ από το υγρό ούτε βυθίζεται ολόκληρος εντός αυτού, να εκφράσεται σε συνάρτηση με τον χρόνο την γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας. Δίνεται η πυκνότητα ρ_K και το ύψος h κάθε κυλινδρικού σώματος, η επιτάχυνση $\vec{g}$ της βαρύτητας και ότι η μάζα της τροχαλίας είναι διπλάσια από την μάζα κάθε σώματος. Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι $I=MR^2/2$, όπου M η μάζα της και R η ακτίνα της.

ΛΥΣΗ: Εξετάζουμε το σύστημα κατά μια τυχαία χρονική στιγμή t που η απομάκρυνση του σώματος Σ_1 από τη θέση ισορροπίας του είναι $\vec{x}$ οπότε η απομάκρυνση του σώματος Σ_2 θα είναι $-\vec{x}$ (βλέπε σχήμα). Τη στιγμή αυτή το Σ_1 δέχεται το βάρος του $\vec{w}$, την άνωση $\vec{A}_1$ από το υγρό και την τάση $\vec{T}_1$ του νήματος, ενώ το σώμα Σ_2 θα δέχεται τις αντίστοιχες δυνάμεις $\vec{w}$, $\vec{A}_2$ και $\vec{T}_2$ οι δε επιταχύνσεις των δύο σωμάτων θα είναι αντίθετες. Θεωρώντας ως θετική φορά στην κατακόρυφη διεύθυνση την φορά της απομάκρυνσης $\vec{x}$ και εφαρμόζοντας για τα δύο σώματα τον δεύτερο νόμο κίνησης του Νεύτωνα παίρνουμε τις σχέσεις:



$$\left.\begin{aligned} w - A_1 - T_1 &= ma \\ w - A_2 - T_2 &= -ma \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} mg - (A_0 + S\rho_\upsilon gx) - T_1 &= ma \\ mg - (A_0 - S\rho_\upsilon gx) - T_2 &= -ma \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

όπου $\vec{\mathbf{A}}_0$ η άνωση που δέχεται κάθε κυλινδρικό σώμα όταν το σύστημα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας του και S το εμβαδόν διατομής τους. Εξάλλου η τροχαλία την ίδια στιγμή περιστρέφεται περί τον σταθερό οριζόντιο άξονά της υπό την επίδραση των ροπών των τάσεων $\vec{\mathbf{T}}'_1$ και $\vec{\mathbf{T}}'_2$ του νήματος που περιβάλλει τον λαιμό της, οι οποίες τάσεις είναι αντίθετες των τάσεων $\vec{\mathbf{T}}_1$ και $\vec{\mathbf{T}}_2$ (τρίτο αξίωμα του Νεύτωνα) και σύμφωνα με τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης θα ισχύει η σχέση:

$$(-\mathbf{T}'_2 + \mathbf{T}'_1)\mathbf{R} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}' \;\;\Rightarrow\;\; (-\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_1)\mathbf{R} = \mathbf{2mR^2}\boldsymbol{\omega}'/\mathbf{2} \;\;\Rightarrow$$

$$-\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_1 = \mathbf{mR}\boldsymbol{\omega}' \tag{2}$$

όπου $\vec{\boldsymbol{\omega}}'$ η γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας. Όμως η επιτρόχια επιτάχυνση του σημείου Α της τροχαλίας και είναι ίση με $\vec{\mathbf{a}}$, δηλαδή ισχύει Rω'=a, οπότε η σχέση (2) γράφεται:

$$-\mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_1 = \mathbf{ma} \tag{3}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις παίρνουμε:

$$-\mathbf{2S}\rho_\upsilon\mathbf{gx} + (\mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_1) = \mathbf{2ma} \;\;\overset{(3)}{\Rightarrow}\;\; -\mathbf{2S}\rho_\upsilon\mathbf{gx} - \mathbf{ma} = \mathbf{2ma} \;\;\Rightarrow$$

$$-\mathbf{2S}\rho_\upsilon\mathbf{gx} = \mathbf{3Sh}\rho_\kappa\mathbf{a} \;\;\Rightarrow\;\; \mathbf{a} = \frac{-\mathbf{2S}\rho_\upsilon\mathbf{gx}}{\mathbf{3Sh}\rho_\kappa} = -\boldsymbol{\Omega}^2\mathbf{x} \tag{4}$$

με

$$\boldsymbol{\Omega} = \sqrt{\mathbf{2}\rho_\upsilon\mathbf{g}/\mathbf{3h}\rho_\kappa} \tag{5}$$

Η σχέση (4) εγγυάται ότι το σώμα Σ_1 εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα Ω. Επειδή την χρονική στιγμή t=0 η απομάκρυνση του Σ_1 είναι x_0 και η ταχύτητά του μηδενική, η εξίσωση της ταχύτητάς του θα έχει την μορφή:

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{x}_0\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\sigma\upsilon\nu}(\boldsymbol{\Omega}\mathbf{t} + \boldsymbol{\pi}/\mathbf{2}) = -\mathbf{x}_0\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\eta\mu}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{t}$$

Εάν $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ είναι η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας την χρονική στιγμή t, τότε η αλγεβρική της τιμή θα προκύψει από την σχέση v_1=ωR, η οποία απορρέει από το γεγονός ότι η ταχύτητα του σημείου Α της τροχαλίας είναι κάθε στιγμή ίση με την ταχύτητα του Σ_1. Έτσι θα έχουμε τη σχέση:

$$\boldsymbol{\omega}\mathbf{R} = -\mathbf{x}_0\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\eta\mu}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{t} \;\;\Rightarrow\;\; \boldsymbol{\omega} = -(\mathbf{x}_0\boldsymbol{\Omega}/\mathbf{R})\boldsymbol{\eta\mu}\boldsymbol{\Omega}\mathbf{t}$$