

**ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ  
(ΟΜΑΔΑ Β΄)  
ΔΕΥΤΕΡΑ 16 ΜΑΪΟΥ 2011  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$  και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, να αποδείξετε ότι:  $f'(x_0) = 0$

**Μονάδες 10**

**A2.** Δίνεται συνάρτηση  $f$  ορισμένη στο  $\mathbb{R}$ . Πότε η ευθεία  $y = \lambda x + \beta$  λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$ ;

**Μονάδες 5**

**A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε μιγαδικό αριθμό  $z \neq 0$  ορίζουμε  $z^0 = 1$

β) Μια συνάρτηση  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$  λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in A$  ισχύει η συνεπαγωγή: αν  $x_1 \neq x_2$ , τότε  $f(x_1) \neq f(x_2)$

γ) Για κάθε  $x \in \mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x \mid \sin x = 0\}$  ισχύει:  $(\epsilon\phi x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

δ) Ισχύει ότι:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

- ε) Οι γραφικές παραστάσεις  $C$  και  $C'$  των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία  $y=x$  που διχοτομεί τις γωνίες  $xOy$  και  $x'Oy'$ .

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί  $z$  και  $w$  με  $z \neq 3i$ , οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

$$|z - 3i| + |\bar{z} + 3i| = 2 \quad \text{και} \quad w = z - 3i + \frac{1}{z - 3i}$$

- B1.** Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z$

**Μονάδες 7**

- B2.** Να αποδείξετε ότι  $\bar{z} + 3i = \frac{1}{z - 3i}$

**Μονάδες 4**

- B3.** Να αποδείξετε ότι ο  $w$  είναι πραγματικός αριθμός και ότι  $-2 \leq w \leq 2$

**Μονάδες 8**

- B4.** Να αποδείξετε ότι:  $|z - w| = |z|$

**Μονάδες 6**

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , με  $f'(0) = f(0) = 0$ , η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^x(f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + xf''(x)$$

για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι:  $f(x) = \ln(e^x - x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$

**Μονάδες 8**

**Γ2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

**Μονάδες 3**

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

**Μονάδες 7**

**Γ4.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $\ln(e^x - x) = \sin x$  έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα  $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

**Μονάδες 7**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , οι οποίες για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ικανοποιούν τις σχέσεις:

i)  $f(x) > 0$  και  $g(x) > 0$

ii) 
$$\frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)} dt$$

iii) 
$$\frac{1-g(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{f(x+t)} dt$$

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι παραγωγίσιμες στο  $\mathbb{R}$  και ότι  $f(x) = g(x)$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 9**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = e^x, x \in \mathbb{R}$$

**Μονάδες 4**

## ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$

**Μονάδες 5**

Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$F(x) = \int_1^x f(t^2) dt$$

τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$  και την ευθεία με εξίσωση  $x=1$ .

**Μονάδες 7**

### ΟΛΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ