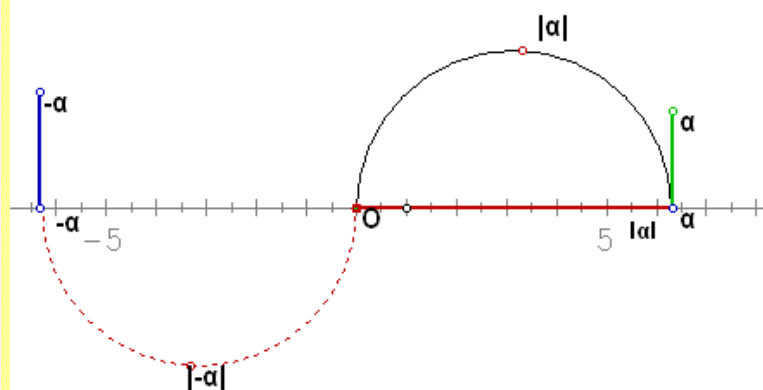


Απόλυτη Τιμή

Η Έννοια της απόλυτης τιμής : Είναι γνωστό ότι σε κάθε σημείο A ενός άξονα αντιστοιχεί ένας πραγματικός αριθμός a και αντίστροφα. Την απόσταση του σημείου A από την αρχή του άξονα δηλ. **το μήκος του ευθ. τμήματος OA, το ονομάζουμε απόλυτη τιμή του αριθμού a και την συμβολίζουμε με $|a|$**

Ορισμός : Αν a είναι ένας πραγματικός αριθμός, ονομάζουμε **απόλυτη τιμή** του a , συμβολικά $|a|$, τον ίδιο τον αριθμό a αν $a \geq 0$ και τον αντίθετό του $-a$ αν $a < 0$.

$$\text{δηλ. } |a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$



[Κάντε «κλικ» για να δείτε κίνηση](#)

Επειδή η απόλυτη τιμή εκφράζει μήκος, είναι πάντοτε μη αρνητικός αριθμός. Παρατηρήστε ακόμη ότι οι αριθμοί a και $-a$ ισαπέχουν από το 0 και άρα έχουν ίσες απόλυτες τιμές δηλ.

$$|a| = |-a| \geq 0 \text{ και βέβαια } |a| = 0 \iff a = 0$$

Εφαρμόζοντας τον ορισμό ...

$$\begin{aligned} |3| &= 3, \quad |-3| = -(-3) = 3, \\ |x^2+1| &= x^2+1, \quad |-2x^2-3| = 2x^2+3 \\ |x^2| &= x^2, \quad |-2-3x^4| = 2+3x^4 \end{aligned}$$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{αν } x \geq 1 \\ -x+1, & \text{αν } x < 1 \end{cases}$$

$$|2x+1| = \begin{cases} 2x+1, & \text{αν } x \geq -\frac{1}{2} \\ -2x-1, & \text{αν } x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Η εξίσωση: $|x-1|+|x+2|=0$ είναι αδύνατη γιατί είναι άθροισμα μη αρνητικών αριθμών και άρα πρέπει $x=1$ **και** $x=-2$, άτοπο

Η εξίσωση: $|x-2|+|x^2-4|=0$ έχει μία λύση, την $x=2$ διότι σαν άθροισμα μη αρνητικών αριθμών πρέπει $x=2$ και ($x=2$ ή $x=-2$)

Οι ανισώσεις: $|x+1|+2 < 0$, $|x+1|+2 \leq 0$, $|x+1|+|x-2| < 0$, $|x+1|+|x-2| \leq 0$ προφανώς είναι αδύνατες.

Η ανίσωση $|x-1|+|x^2-1| < 0$ είναι αδύνατη, ενώ η ανίσωση $|x-1|+|x^2-1| \leq 0$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση: $|x-1|+|x^2-1|=0$ και άρα έχει μια λύση, την $x=1$

Οι ανισώσεις: $|x+1|+2 > 0$, $|x+1|+2 \geq 0$, $|x+1|+|x-2| > 0$, $|x+1|+|x-2| \geq 0$ προφανώς αληθεύουν για κάθε τιμή του $x \in \mathbb{R}$.

Η ανίσωση $|x-1|+|x^2-1| > 0$ αληθεύει για κάθε τιμή του $x \in \mathbb{R} - \{1\}$, ενώ η ανίσωση $|x-1|+|x^2-1| \geq 0$ αληθεύει για κάθε τιμή του $x \in \mathbb{R}$.

Να λύσετε την εξίσωση:

$$3|1-x|-2|x+2|+x-1=0$$

Να λύσετε την ανίσωση:

$$3|1-x|-2|x+2|+x-1 \leq 0$$

Να βρείτε αναλυτικό τύπο (τύπο χωρίς απόλυτα) της συνάρτησης:
 $f(x)=2|x-2|-3|x+2|-|x|-x+1$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{x+1}{|x-1|+2}$$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(x) = \frac{x+1}{|x-1|+|2x+1|}$$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(x) = \sqrt{|1-2x|+3}$$

Εφαρμόζοντας τις Ιδιότητες ...

Ιδιότητες

$$|a|^2 = a^2$$

$$-|a| \leq a \leq |a|$$

$$|x|=a \iff x=a \text{ ή } x=-a \quad (a>0)$$

$$|x|=|a| \iff x=a \text{ ή } x=-a$$

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a \quad (a>0)$$

$$|x| \geq a \iff x \geq a \text{ ή } x \leq -a \quad (a>0)$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

και γενικά

$$|x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n| = |x_1| \cdot |x_2| \cdot \dots \cdot |x_n|$$

$$|x^v| = |x|^v$$

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \text{ με } y \neq 0$$

$$|x \pm y| \leq |x| + |y|$$

$$||x| - |y|| \leq |x \pm y|$$

Εφαρμογές

Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\bullet 2|x+1|+3=0$$

$$\bullet 2|x+1|-3=0$$

$$\bullet 2|1-x|-3|x+2|=0$$

$$\bullet 3|2-x|+2|2-x|-4=|2-x|$$

$$\bullet 2 \frac{|3-x|}{3} - 3 \frac{|3-x|}{2} + 1 = |3-x|$$

$$\bullet x^2 - 3|x| + 2 = 0$$

$$\bullet (x-1)^2 - |x-1| - 2 = 0$$

$$\bullet \text{Πότε ισχύει: } |x+y| = |x| + |y|$$

$$\bullet \text{Πότε ισχύει: } |x-y| = |x| + |y|$$

$$\bullet \text{Πότε ισχύει: } ||x|-|y|| = |x+y|$$

$$\bullet \text{Πότε ισχύει: } ||x|-|y|| = |x-y|$$

$$\bullet \text{Δείξτε ότι: } |a+1| + |a-1| \geq 2$$

[αποδ:

$$|a+1| + |a-1| \geq |a+1-a+1| = 2]$$

Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\bullet 2|2-3x|+3 \geq 0$$

$$\bullet 2|2-3x|+3 \leq 0$$

$$\bullet 2|2-3x|-3 \geq 0$$

$$\bullet 2|2-3x|-3 \leq 0$$

$$\bullet 3|2-x|+2|2-x|-4 \leq |2-x|$$

$$\bullet 2 \frac{|3-x|}{3} - 3 \frac{|3-x|}{2} + 1 > |3-x|$$

$$\bullet |x^2-4| + |x^2-4x+4| \leq 0$$

$$\bullet 5 \leq |3-2x| \leq 12$$

$$\bullet \text{Δείξτε ότι αν } ||x|-|y|| = |x+y|$$

$$\text{τότε } x|y| + y|x| = 0$$

Τέλος, αν A, B είναι οι εικόνες των αριθμών a, β, η $|a-\beta|$ εκφράζει την απόσταση των εικόνων τους και συμβολίζεται με $d(A,B)$ δηλ. $(AB)=d(A,B)=|a-\beta|$

- Να αποδείξετε ότι η εικόνα του αριθμού $(a+\beta)/2$ βρίσκεται στο μέσον των εικόνων των αριθμών a, β
[Υποδ: Αρκεί να δείξουμε ότι: $|a-(a+\beta)/2|=|\beta-(a+\beta)/2| \dots]$

- Μπορούμε εύκολα να βρούμε τη λύση της εξίσωσης $|x-1|=|x-3|$, αν σκεφθούμε ότι ο x πρέπει να ισαπέχει από τους $1, 3$ δηλ. να βρίσκεται στο μέσον τους και άρα $x=(1+3)/2=2$

Προτεινόμενες Ασκήσεις :

1. Αν $a \leq \beta \leq \gamma$ να δείξετε ότι: $|a-\beta|+|\beta-\gamma|+|\gamma-a|=0$
2. Να βρείτε αναλυτικό τύπο (τύπο χωρίς απόλυτα) της παράστασης $K=|x-1|+|x-2|$
3. Να υπολογίσετε τις τιμές του ακεραίου x , αν είναι γνωστό ότι ισχύουν οι σχέσεις: $|2x-1|=1-2x$ και $|x+1|=x+1$
4. Αν $d(4x,3y)=4x-3y$, να αποδείξετε ότι $y \leq 4x/3$
5. Αποδείξτε ότι:

$ 3 a +4a =4 a +3a$	$ a^2+2a+1 - a^2-2a+1 =4a$	$ a^2+4a+5 +5= a^2-6a+10 +10a$
$\frac{3a}{ a } + \frac{7\beta}{ \beta } \leq 10$	$(\mu-\lambda +\lambda-\mu)(\lambda-\mu -\lambda+\mu) \geq 0$	$(a \beta -\beta a)(a \beta +\beta a)=0$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

• $ x^2+2x^3-12 =-1$	• $ x =-x^2+2x-1$	• $ 7x-1 =2$	• $ 2x+1 = x+1 $
• $ 2x-1 =(2x-1)^2$	• $ x-5 + x^2-5x =0$	• $ x-5 + x^2-5x =0$	• $(x-2)^2+1=2 x-2 $

$$\bullet |3|x-1|+1|=3$$

$$\bullet |x-1|+2|1-x|=3$$

$$\bullet \frac{|x-2|}{2} + |x-2| = \frac{|2-x|+5}{4}$$

$$\bullet \left| \frac{x-2}{3-2x} \right| = \frac{1}{3}$$

7. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$\bullet |8-3x| < 2$$

$$\bullet |3-4x| \geq 1$$

$$\bullet |2x-5| \leq -x^2+2x-1$$

$$\bullet |x^2-2x| \leq -4x^2+4x-1$$

$$\bullet |x-4| < x-1$$

$$\bullet 2 \leq |x-1| \leq 4$$

$$\bullet \frac{|2x+1|}{3} - \frac{5|2x+1|}{6} < \frac{4|2x+1|+1}{12} + \frac{|2x+1|}{4}$$

8. Να αποδείξετε ότι αν $|7x+2y-4| = 7|x|+2|y-2|$, τότε $x(y-2) \geq 0$

9. Να αποδείξετε ότι: $\frac{(2a+1)^2}{|2a+1|} + \frac{(2a-1)^2}{|2a-1|} \geq 2$

10. Αν $|x| \leq 3$ και $|y| \leq 5$, να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης: $K=2x-3y-21$.