

# Η Διάταξη στο IR

<b>Ορισμοί :</b>	Αν $a, \beta$ είναι δύο πραγματικοί αριθμοί τότε ορίζουμε:	
	$a > \beta \Leftrightarrow a - \beta > 0$ και $a \geq \beta \Leftrightarrow a - \beta \geq 0$	
	$a < \beta \Leftrightarrow a - \beta < 0$ και $a \leq \beta \Leftrightarrow a - \beta \leq 0$	
	<u>Ιδιότητες</u>	<u>Παρατηρήσεις - Σχόλια</u>
	$a > 0$ και $\beta > 0 \Rightarrow a + \beta > 0$	Αν $a, \beta$ ομόσημοι τότε: $a < \beta \Leftrightarrow 1/a > 1/\beta$
	$a < 0$ και $\beta < 0 \Rightarrow a + \beta < 0$	Για κάθε $a, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει: $a^2 + \beta^2 \geq 2a\beta$
Αν $a, \beta$ ομόσημοι $\Rightarrow a \cdot \beta > 0$ και $a/\beta > 0$		<ul style="list-style-type: none"> <li>• Αν <math>a &gt; 0 \Rightarrow a + \frac{1}{a} \geq 2</math></li> <li>• Αν <math>a &lt; 0 \Rightarrow a + \frac{1}{a} \leq -2</math></li> </ul>
Αν $a, \beta$ ετερόσημοι $\Rightarrow a \cdot \beta < 0$ και $a/\beta < 0$		
Αν $a \cdot \beta > 0$ ή $a/\beta > 0 \Rightarrow a, \beta$ ομόσημοι		
Αν $a \cdot \beta < 0$ ή $a/\beta < 0 \Rightarrow a, \beta$ ετερόσημοι		
Για κάθε $a \in \mathbb{R} \Rightarrow a^2 \geq 0$ και γενικά $a^{2v} \geq 0$		Μπορούμε εύκολα να ανακαλύπτουμε μόνιμα θετικές ή μόνιμα αρνητικές παραστάσεις. Έτσι: $x^2 + 3 > 0, 2x^4 + 1 > 0, -x^2 - 5 < 0, -3x^2 - 1 < 0$ κ.λ.π
Αν $a > \beta$ και $\beta > \gamma \Rightarrow a > \gamma$ ( μεταβατική ιδιότητα )		Αν $a \geq \beta$ και $\beta \geq \gamma \Rightarrow a \geq \gamma$ ( μεταβατική ιδιότητα )
Αν $a > \beta \Leftrightarrow a + \gamma > \beta + \gamma$		
Αν $\gamma > 0$ τότε: $a > \beta \Leftrightarrow a \cdot \gamma > \beta \cdot \gamma$		Όταν σε μια ανίσωση κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών πρέπει να ελέγχουμε το Ε.Κ.Π διότι αν είναι θετικός δεν αλλάζει η φορά της ανίσωσης, ενώ αν είναι αρνητικός αλλάζει η φορά της ανίσωσης
Αν $\gamma < 0$ τότε: $a > \beta \Leftrightarrow a \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$		
Αν $a > \beta$ και $\gamma > \delta \Rightarrow a + \gamma > \beta + \delta$		Δεν μπορούμε να αφαιρούμε ή να διαιρούμε ομοιόστροφες ανισώσεις κατά μέλη.
Αν $a, \beta, \gamma, \delta > 0$ ισχύει: $a > \beta$ και $\gamma > \delta \Rightarrow a \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$		Δεν μπορούμε να πολλαπλασιάζουμε ομοιόστροφες ανισώσεις κατά μέλη όταν όλοι οι όροι δεν είναι ομόσημοι.
Αν $a, \beta, \gamma, \delta < 0$ ισχύει: $a > \beta$ και $\gamma > \delta \Rightarrow a \cdot \gamma < \beta \cdot \delta$		
Για θετικούς αριθμούς και $v \in \mathbb{N}^*$ ισχύει: $a = \beta \Leftrightarrow a^v = \beta^v$ $a > \beta \Leftrightarrow a^v > \beta^v$		Γενικότερα για ομόσημους αριθμούς ισχύει: $a = \beta \Leftrightarrow a^v = \beta^v$ Για ετερόσημους αριθμούς: $a^v = \beta^v \Rightarrow a = -\beta$

## Μεθοδολογία για τις ασκήσεις

Για να αποδείξουμε μια ανισότητα της μορφής  $A > B$  ή  $A < B$  ή  $A \geq B$  ή  $A \leq B$  εργαζόμαστε συνήθως με έναν από τους παρακάτω τρόπους:

### 1<sup>ος</sup> Τρόπος :

Σχηματίζουμε τη διαφορά  $A-B$  και προσπαθούμε να βρούμε το πρόσημό της (παίρνουμε βέβαια πάντα υπόψη μας τις υποθέσεις της άσκησης).

Αν βρούμε  $A-B \geq 0$  τότε  $A \geq B$

Αν βρούμε  $A-B \leq 0$  τότε  $A \leq B$  κ.λ.π

### 2<sup>ος</sup> Τρόπος :

Ξεκινάμε από την ανισότητα που μας δίνεται και με ισοδυναμίες προσπαθούμε να φτάσουμε σε μία σχέση που ισχύει.

### 3<sup>ος</sup> Τρόπος :

Χρησιμοποιώντας τις υποθέσεις της άσκησης ή και άλλες γνωστές σχέσεις προσπαθούμε να «κατασκευάσουμε» την ανισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε.

## Ασκήσεις

1. Αν  $a > \beta$  να αποδείξετε ότι:  $a + \frac{\beta}{2} > \beta + \frac{a}{2}$

Λύση :

1<sup>ος</sup> Τρόπος :  $\left(a + \frac{\beta}{2}\right) - \left(\beta + \frac{a}{2}\right) = a + \frac{\beta}{2} - \beta - \frac{a}{2} = \frac{2a + \beta - 2\beta - a}{2} = \frac{a - \beta}{2} > 0$ ,

γιατί  $a - \beta > 0$  από την υπόθεση  $a > \beta$

2<sup>ος</sup> Τρόπος :

$$a + \frac{\beta}{2} > \beta + \frac{a}{2} \Leftrightarrow a - \frac{a}{2} > \beta - \frac{\beta}{2} \Leftrightarrow \frac{a}{2} > \frac{\beta}{2} \Leftrightarrow a > \beta, \text{ που ισχύει από την υπόθεση}$$

2. Αν  $a > \beta$  και  $k$  ακέραιος με  $k > 1$ , να αποδείξετε ότι:  $a + \frac{\beta}{k} > \beta + \frac{a}{k}$

Λύση :

1<sup>ος</sup> Τρόπος :  $\left(a + \frac{\beta}{k}\right) - \left(\beta + \frac{a}{k}\right) = a + \frac{\beta}{k} - \beta - \frac{a}{k} = \frac{k\alpha + \beta - k\beta - \alpha}{k} = \frac{(k-1)(\alpha - \beta)}{k} > 0$ ,

γιατί  $\alpha - \beta > 0$  από την υπόθεση  $\alpha > \beta$  και  $k > 1$

2<sup>ος</sup> Τρόπος :

$$a + \frac{\beta}{k} > \beta + \frac{a}{k} \Leftrightarrow \alpha - \frac{\alpha}{k} > \beta - \frac{\beta}{k} \Leftrightarrow \frac{(k-1)\alpha}{2} > \frac{(k-1)\beta}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{k-1}{2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha > \beta, \text{ που ισχύει από την υπόθεση}$$

3. Αν  $\alpha + \beta > 0$ , να αποδείξετε ότι:  $\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha + \beta} \geq \frac{\alpha + \beta}{2}$

Λύση :

1<sup>ος</sup> τρόπος :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha + \beta} \right) - \left( \frac{\alpha + \beta}{2} \right) &= \frac{2\alpha^2 + 2\beta^2 - (\alpha + \beta)^2}{2(\alpha + \beta)} = \frac{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2}{2(\alpha + \beta)} = \\ &= \frac{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta}{2(\alpha + \beta)} = \frac{(\alpha - \beta)^2}{2(\alpha + \beta)} \geq 0, \text{ λόγω της υπόθεσης και } (\alpha - \beta)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

2<sup>ος</sup> τρόπος :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha + \beta} \geq \frac{\alpha + \beta}{2} &\Leftrightarrow 2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (\alpha + \beta)^2 \Leftrightarrow 2\alpha^2 + 2\beta^2 \geq \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta, \text{ που ισχύει ( με την απαλοιφή παρονομαστών δεν αλλάζει η φορά )} \end{aligned}$$

3<sup>ος</sup> τρόπος :

Ξέρουμε ότι:

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta &\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \alpha^2 + \beta^2 \geq \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (\alpha + \beta)^2 \stackrel{\alpha + \beta > 0}{\Rightarrow} \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha + \beta} \geq \frac{\alpha + \beta}{2} \end{aligned}$$

4. Αν  $\chi > 3$  και  $\gamma > 4$ , να αποδείξετε ότι:  $\chi^3 + \gamma^2 + 1 > 44$

5. Αν  $\alpha, \beta$  είναι ομόσημοι να δείξετε ότι:  $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2$

6. Αν  $\alpha, \beta$  είναι ετερόσημοι, να δείξετε ότι:  $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \leq -2$

7. Αν  $0 < a < 1$  , να αποδείξετε ότι :  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} > 2$

Λύση :

1<sup>ος</sup> τρόπος :

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} - 2 &= \frac{1+a-2a^2}{a^2} = \frac{1+a-a^2-a^2}{a^2} = \frac{(1-a^2)+a(1-a)}{a^2} = \\ &= \frac{(1-a)(1+a)+a(1-a)}{a^2} = \frac{(1-a)(1+2a)}{a^2} > 0, \text{ διότι : } 1-a > 0, 1+2a > 0, a^2 > 0 \end{aligned}$$

2<sup>ος</sup> τρόπος :

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a} > 2 &\Leftrightarrow 1+a > 2a^2 \Leftrightarrow 1+a-a^2-a^2 > 0 \Leftrightarrow (1-a^2)+a(1-a) > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (1-a)(1+a)+a(1-a) > 0 \Leftrightarrow (1-a)(1+2a) > 0, \text{ που ισχύει } (0 < a < 1) \end{aligned}$$

8. Να αποδείξετε ότι :  $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 \geq \frac{(\alpha + \beta)^2}{4}$

9. Αν  $a > \beta > 0$  να αποδείξετε ότι :  $\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} > \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta}$

10. Αν  $a, \beta, \gamma$  είναι θετικοί , να αποδείξετε ότι :  $a^2(\beta+\gamma)+\beta^2(a+\gamma)+\gamma^2(a+\beta) \geq 6a\beta\gamma$

11. Αν  $a, \beta > 0$  να αποδείξετε ότι :  $\frac{a^3 + \beta^3}{2} \geq \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^3$

12. Αν  $a, \beta$  είναι ομόσημοι και  $a < 1, \beta < 1$  , να αποδείξετε ότι :  $\frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} < \frac{1}{\alpha\beta}$

13. Αν  $\chi, \gamma, \omega$  είναι θετικοί αριθμοί να συγκρίνετε τους αριθμούς :  
 $\alpha=(1+\chi)(1+\gamma)(1+\omega)$  και  $\beta=1+\chi+\gamma+\omega$

14. Αν  $a < \beta$  και  $0 < \chi < 1$  , να αποδείξετε ότι :  $a < a+\chi(\beta-a) < \beta$

15. Αν  $-2 \leq \chi \leq 5$  και  $-1 \leq \gamma \leq 2$  , να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης  $K=3\chi-3\gamma-5$