Ρίζες

Η Τετραγωνική ρίζα

(από το Γυμνάσιο γνωρίζουμε …)

Ορισμός : Τετραγωνική ρίζα ενός **μη αρνητικού αριθμού α** (συμβολικά $\sqrt{a}$), ονομάζουμε ένα **μη αρνητικό αριθμό x** με την ιδιότητα : **$x^2=a$** δηλ.

$$\sqrt{a}=x \Leftrightarrow x^2=a$$

Παραδείγματα - Σχόλια

1. $\sqrt{25}=5$ και βέβαια $\sqrt{25}\neq -5$
2. Η έκφραση $\sqrt{-4}$ δεν έχει έννοια.
3. Η παράσταση $K=\sqrt{1-x}+\sqrt{x+2}$ έχει έννοια όταν $-2 \leq x \leq 1$
4. Η εξίσωση: $\sqrt{x+1}+3=0$ είναι αδύνατη

Ιδιότητες

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=\alpha \quad ,\text{για κάθε } \alpha \geq 0$$

$$\sqrt{\alpha^2}=|\alpha| \quad ,\text{για κάθε } \alpha \in R$$

$$\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=\sqrt{\alpha\cdot\beta} \quad ,\text{με } \alpha,\beta \geq 0$$

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \quad ,\text{με } \alpha \geq 0\,,\beta > 0$$

$$\sqrt{\alpha^2\cdot\beta}=\alpha\cdot\sqrt{\beta} \quad ,\text{με } \alpha,\beta \geq 0$$

$$\sqrt{a}\pm\sqrt{\beta}\neq\sqrt{\alpha\pm\beta} \quad ,\alpha,\beta \geq 0$$

1. $\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)=\left(3\sqrt{2}\right)^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2=6$
2. $\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}=\left|1-\sqrt{2}\right|=\sqrt{2}-1$
3. $\sqrt{\left(x^2+1\right)^2}=x^2+1$
4. $\sqrt{\left(x\ \ +1\right)^2}=\left|x\ \ +1\right|$
5. $\sqrt{8}=\sqrt{2^2\cdot 2}=\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{2}=2\cdot\sqrt{2}$
6. $\sqrt{864}=\sqrt{2^5\cdot 3^3}=\sqrt{2^4\cdot 2\cdot 3^4\cdot 3}=2^2\cdot 3^2\cdot\sqrt{6}$
7. $\sqrt{9x^3y^4\omega}=\sqrt{3^2\cdot x^2\cdot x\cdot\left(y^2\right)^2\cdot\omega}=3|x|y^2\sqrt{x\omega}$
8. $\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{1+3-2\sqrt{3}}=\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{3}-1$

Μετατροπή κλασμάτων της μορφής $\dfrac{A}{\kappa\sqrt{\alpha}\pm\lambda\sqrt{\beta}}$ σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή

Θυμηθείτε : Πολ/ζουμε αριθμητή και παρονομαστή με τη συζυγή παράσταση του παρονομαστή …

1. $$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}=\frac{3+\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2-1}=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$$

2. $$\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}+\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)^2+\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)^2}{\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)}=$$

$$=\frac{2\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2+2\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}=\frac{4x^2}{2}=2x^2$$

Η Νιοστή ρίζα

Ορισμός : Νιοστή ρίζα ενός **μη αρνητικού αριθμού α** (συμβολικά $\sqrt[\nu]{\alpha}$) , ονομάζουμε ένα **μη αρνητικό αριθμό x** με την ιδιότητα : **$x^\nu = a$**

δηλ. $\sqrt[\nu]{\alpha} = x \Leftrightarrow x^\nu = a$

Ιδιότητες

$$\left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^\nu = \alpha \text{ , για κάθε } \alpha \geq 0$$

$$\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = \alpha \text{ , για κάθε } \alpha \geq 0$$

$$\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta} \text{ , με } \alpha, \beta \geq 0$$

$$\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}} \text{ , με } \alpha \geq 0 , \beta > 0$$

$$\sqrt[\nu]{\alpha^\nu \cdot \beta} = \alpha \cdot \sqrt[\nu]{\beta} \text{ , με } \alpha, \beta \geq 0$$

$$\sqrt[\nu]{\alpha} \pm \sqrt[\nu]{\beta} \neq \sqrt[\nu]{\alpha \pm \beta} \text{ , } \alpha, \beta \geq 0$$

$$\sqrt[\nu]{\alpha^k} = \left(\sqrt[\nu]{\alpha}\right)^k \text{ , με } \alpha, \beta \geq 0$$

$$\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}} = \sqrt[\nu \cdot \mu]{\alpha} \text{ , με } \alpha \geq 0$$

$$\sqrt[\nu \cdot \rho]{\alpha^{\mu \cdot \rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu} \text{ , με } \alpha \geq 0$$

$$\alpha < \beta \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\alpha} < \sqrt[\nu]{\beta} \text{ , με } \alpha, \beta \geq 0$$

Παραδείγματα - Σχόλια

$\sqrt{8} \quad 2 \qquad \sqrt{\ \ 8} = -2$

2. Η έκφραση $\sqrt[2\nu]{-4}$ δεν έχει έννοια.

3. $\sqrt[4]{(x-1)^4} = |x-1|$

4. $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{2ax}$

5. $\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{8}} = \sqrt[4]{\dfrac{32}{8}} = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2}$

6. $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{4} \cdot \sqrt{8} = \sqrt[12]{2^4} \cdot \sqrt[12]{4^3} \cdot \sqrt[12]{8^6} =$

$= \sqrt[12]{2^4 \cdot 2^6 \cdot 2^{18}} = \sqrt[12]{2^{28}} = \sqrt[3]{2^7} =$

$= \sqrt[3]{\left(2^2\right)^3 \cdot 2} = 4\sqrt{2}$

7. $\sqrt{2a \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[4]{4 \cdot a^2}}} =$

$= \sqrt{2a \cdot \sqrt[3]{\sqrt[4]{2^4 \cdot 2^2 a^2}}} = \sqrt{2a \cdot \sqrt[12]{2^6 \cdot a^2}} =$

$= \sqrt{\sqrt[12]{(2 \cdot a)^{12} \cdot 2^6 \cdot a^2}} = \sqrt[24]{2^{18} \cdot a^{14}} = \sqrt[12]{2^9 \cdot a^7}$

8. Τροπή κλασμάτων της μορφής $\dfrac{A}{\alpha \cdot \sqrt[\nu]{\beta^\mu}}$ σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:

$$\frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\frac{1}{3\sqrt[5]{2^2}} = \frac{\sqrt[5]{2^3}}{3\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt[5]{2^3}} = \frac{\sqrt[5]{8}}{3 \cdot \sqrt[5]{2^5}} = \frac{\sqrt[5]{8}}{6}$$

Η Εξίσωση $x^\nu = \alpha$

ν = άρτιος και α<0	ν = άρτιος και α>0	ν = περιττός και α>0	ν = περιττός και α>0
ΑΔΥΝΑΤΗ	**Η εξίσωση έχει δύο λύσεις** $x = \pm\sqrt[\nu]{\alpha}$	**Η εξίσωση έχει μία λύση** $x = \sqrt[\nu]{\alpha}$	**Η εξίσωση έχει μία λύση** $x = -\sqrt[\nu]{\lvert\alpha\rvert}$