Συναρτήσεις

Συνάρτηση f , λέγεται η **διαδικασία** με βάση την οποία σε **κάθε** στοιχείο χ ενός συνόλου Α αντιστοιχούμε **ακριβώς ένα** στοιχείο ενός άλλου συνόλου Β.

Το σύνολο Α λέγεται **πεδίο ορισμού** (ή σύνολο ορισμού) της συνάρτησης f και το σύνολο Β λέγεται **σύνολο τιμών** (ή πεδίο τιμών) της συνάρτησης f και συμβολίζεται με **f(A)**.

Έτσι για να ορίσουμε μια συνάρτηση απαιτούνται

- Το πεδίο ορισμού της Α
- Το σύνολο τιμών της f(A)
- Η εικόνα f(x) κάθε x του Α

Αν το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης δεν δίνεται, τότε συμφωνούμε να ορίζουμε το πεδίο ορισμού της Α σαν **«το ευρύτερο υποσύνολο του IR για τις τιμές του οποίου έχει νόημα το f(x)»**

Κάθε συνάρτηση μπορεί να παρασταθεί γραφικά στο Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Έτσι το σύνολο των σημείων (x,f(x)) με $x \in A$ αποτελεί τη **γραφική παράσταση της συνάρτησης**.

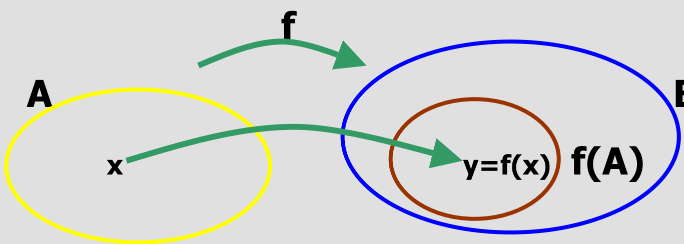
Όσον αφορά ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων ας παρατηρήσουμε ότι:

- τα σημεία Α(x,y) και Β(x,-y) είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα χ΄χ
- τα σημεία Α(x,y) και Β(-x, y) είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y΄y
- τα σημεία Α(x,y) και Β(-x,-y) είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων Ο(0,0)
- Η απόσταση (ΑΒ) των σημείων $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ είναι:

  $$(AB)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

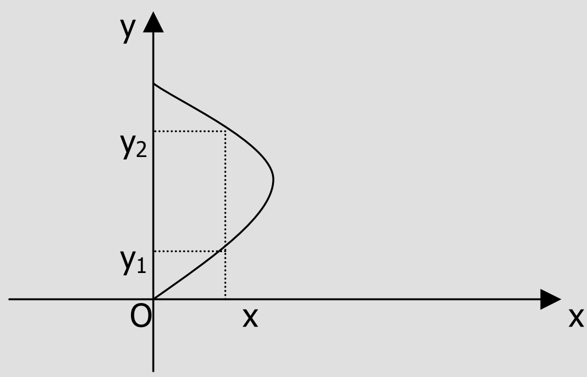
- Ειδικά για τα σημεία $A(x_1,y_1)$ και $B(x_1,y_2)$ είναι: **(AB)= $|y_2-y_1|$** και για τα σημεία

Παρατηρήσεις - Σχόλια



$$f : A \to B : x \to y = f(x)$$

- Τα σύνολα Α , Β θα τα θεωρούμε υποσύνολα του IR.
- Το x λέγεται **ανεξάρτητη μεταβλητή** και το y=f(x) **εξαρτημένη μεταβλητή**. Λέμε ακόμη ότι το y=f(x) είναι **εικόνα** του x.
- Συνήθως αντί της αντιστοίχισης κάθε χ του Α στην εικόνα του y=f(x), χρησιμοποιούμε τον **τύπο της συνάρτησης** από τον οποίο για κάθε x μπορούμε να βρίσκουμε την εικόνα του. Έτσι το πεδίο ορισμού δεν χρειάζεται να μας δίνεται αφού μπορούμε να το προσδιορίζουμε.
- Κάθε εξίσωση δεν παριστάνει πάντοτε συνάρτηση π.χ. η εξίσωση $x^2+y^2=1$ δεν παριστάνει συνάρτηση διότι λύνοντας ως προς y έχουμε $y=\pm\sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1,1]$ και άρα σε κάθε x του Α=[-1,1] **δεν** αντιστοιχεί ακριβώς ένα y (αντιστοιχούν δύο)
- Κάθε καμπύλη δεν είναι πάντοτε γραφική παράσταση συνάρτησης γιατί μπορεί να υπάρχουν x που να αντιστοιχούν περισσότερα του ενός y π.χ



A(χ_1,y_1) και B(χ_2,y_1) είναι:

(AB)= |χ_2-χ_1|

Αν κάθε κατακόρυφη ευθεία τέμνει μια καμπύλη το πολύ σε ένα σημείο τότε η καμπύλη αυτή είναι γραφική παράσταση μια συνάρτησης.

Βασικές Έννοιες

Μονοτονία

- Μία συνάρτηση f|A λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν για κάθε x_1 , x_2 $\in$Δ ισχύει: **$x_1 < x_2$ τότε $f(x_1) < f(x_2)$**

- Μία συνάρτηση f|A λέγεται **γνησίως**

  ορισμού της, αν για κάθε x_1 , x_2 $\in$Δ ισχύει: **$x_1 < x_2$ τότε $f(x_1) > f(x_2)$**

- Μία συνάρτηση f|A λέγεται **αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν για κάθε x_1 , x_2 $\in$Δ ισχύει:
  $x_1 < x_2$ τότε $f(x_1) \leq f(x_2)$

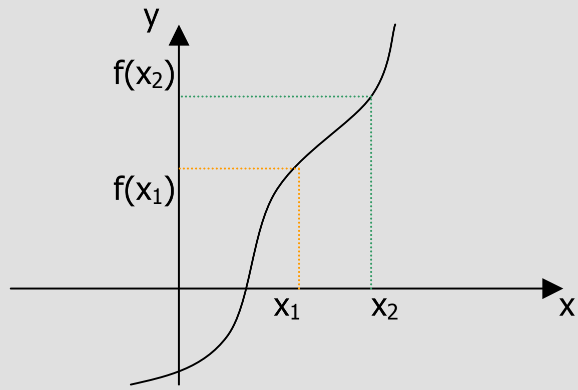
- Μία συνάρτηση f|A λέγεται **φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν για κάθε x_1 , x_2 $\in$Δ ισχύει:
  $x_1 < x_2$ τότε $f(x_1) \geq f(x_2)$

- Μία συνάρτηση γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ, λέγεται **γνησίως μονότονη στο Δ** , ενώ μια συνάρτηση αύξουσα ή φθίνουσα στο Δ λέγεται **μονότονη στο Δ**.

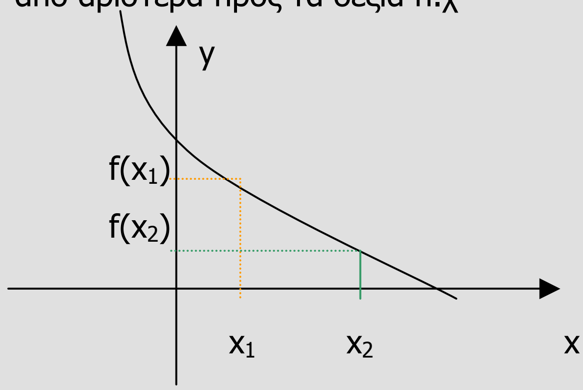
Ακρότατα

- Θα λέμε ότι η συνάρτηση f|A παρουσιάζει στο $x_0 \in$A, **ελάχιστο το $f(x_0)$** , αν για κάθε $x \in$A ισχύει: **$f(x_0) \leq f(x)$**
- Θα λέμε ότι η συνάρτηση f|A παρουσιάζει στο $x_0 \in$A, **μέγιστο το $f(x_0)$** , αν για κάθε $x \in$A ισχύει: **$f(x) \leq f(x_0)$**
- Το μέγιστο και το ελάχιστο μιας συνάρτησης f (αν υπάρχουν) λέγονται **ακρότατα της f**.

- Κάθε γνησίως αύξουσα συνάρτηση έχει γραφική παράσταση γραμμή «ανερχόμενη» από αριστερά προς τα δεξιά π.χ



- Κάθε γνησίως φθίνουσα συνάρτηση έχει γραφική παράσταση γραμμή «κατερχόμενη» από αριστερά προς τα δεξιά π.χ



- Ο λόγος

  $$\lambda(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, (x_2 \neq x_1)$$ λέγεται

  λόγος μεταβολής της συνάρτησης f και μας δίνει πληροφορίες για την μονοτονία της συνάρτησης f
  - ✓ Αν λ>0 τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ
  - ✓ Αν λ<0 τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ
  - ✓ Αν $\lambda \geq 0$ τότε η f είναι αύξουσα στο Δ
  - ✓ Αν $\lambda \leq 0$ τότε η f είναι φθίνουσα στο Δ
  - ✓ Αν λ=0 τότε η f είναι σταθερή

- Τα ακρότατα μιας συνάρτησης τα βρίσκουμε από το σύνολο τιμών της συνάρτησης. Το δε

Άρτια – Περιττή συνάρτηση

- Μία συνάρτηση f|A λέγεται **άρτια** , αν για κάθε x , -x∈A ισχύει: f(-x)=f(x)
- Μία συνάρτηση f|A λέγεται **περιττή** , αν για κάθε x , -x∈A ισχύει: f(-x)=f(x)

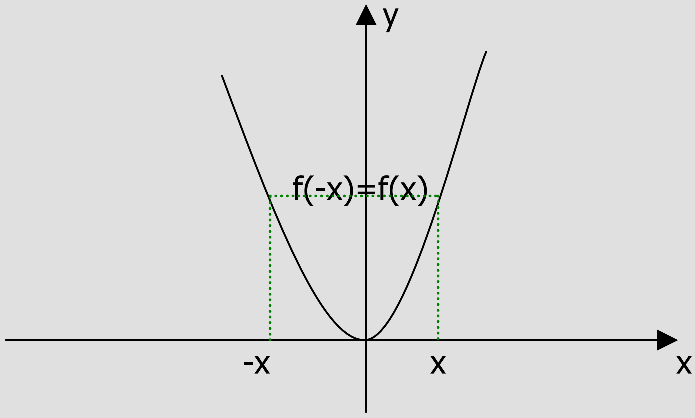
Μελέτη και Γραφική Παράσταση συνάρτησης

Για την μελέτη μιας συνάρτησης δηλ. για να αναζητήσουμε ορισμένες ιδιότητές της που θα μας οδηγήσουν στην γραφική της παράσταση, ακολουθούμε τα εξής βήματα

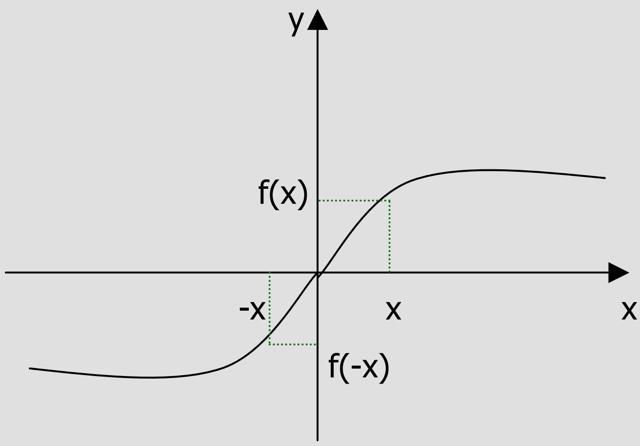
- Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της A
- Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f(A) αν είναι δυνατό
- Από το σύνολο τιμών προσδιορίζουμε τα ακρότατα αν υπάρχουν
- Εξετάζουμε αν παρουσιάζει συμμετρίες, δηλ. αν είναι άρτια ή περιττή
- Μελετούμε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία της
- Εξετάζουμε πως συμπεριφέρεται η συνάρτηση για πολύ μεγάλες και πολύ μικρές τιμές του χ
- Κάνουμε ένα πίνακα χαρακτηριστικών τιμών. Βρίσκουμε τα σημεία τομής με τους άξονες [για χ=0 βρίσκουμε που τέμνει τον y΄y και για y=0 βρίσκουξε που τέμνει τον χ΄χ]
- Τέλος κάνουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης από τις πληροφορίες που έχουμε μαζέψει από τα προηγούμενα βήματα

σύνολο τιμών της συνάρτησης f(A) βρίσκεται από την λύση της εξίσωσης y=f(x) y∈IR ,x∈A λύνοντας ως προς χ.

- Κάθε άρτια ή περιττή συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού συμμετρικό ως προς το 0
- Κάθε άρτια συνάρτηση έχει γραφική παράσταση **συμμετρική ως προς τον άξονα y΄y**



- Κάθε περιττή συνάρτηση έχει γραφική παράσταση **συμμετρική ως προς την αρχή O(0,0) των αξόνων**



Η συνάρτηση f(x)=αx+β

- Κάθε συνάρτηση της μορφής **f(x)=αx+β** παριστάνει **ευθεία** και για την γραφική της παράσταση αρκούν δύο σημεία της. Έτσι κατασκευάζουμε τον πίνακα τιμών:

x	0	-β/α
y=f(x)	β	0

[θέτοντας διαδοχικά x=0 και y=0 έχουμε το πλεονέκτημα να γνωρίζουμε τα σημεία τομής με

Ειδικές περιπτώσεις :

- Η ευθεία **y=x** είναι **η διχοτόμος του $1^{ου}$ και $3^{ου}$ τεταρτημορίου** , ενώ η **y=-x** είναι **η διχοτόμος του $2^{ου}$ και $4^{ου}$ τεταρτημορίου.**
- Αν α > 0 τότε $0^0 < ω < 90^0$
- Αν α < 0 τότε $90 < ω < 180^0$
- Αν α=0 τότε $ω=0^0$ (σταθερή συνάρτηση)

τους άξονες]

- Αν η συνάρτηση ορίζεται σε διάστημα ή ένωση διαστημάτων στον πίνακα τιμών δίνουμε στο x τις ακριανές τιμές των διαστημάτων για να γνωρίζουμε από πού αρχίζει και που τελειώνει το διάγραμμα της συνάρτησης

- Η συνάρτηση f(x)=αx είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων

- Η συνάρτηση f(x)=αx+β μπορεί να προκύψει από την f(x)=αx με **«κατακόρυφη μετατόπισή» της** κατά β

- Η συνάρτηση f(x)=c (:σταθερή συνάρτηση) παριστάνει ευθεία παράλληλη προς τον άξονα x΄x , ενώ η ευθεία x=c παριστάνει ευθεία παράλληλη προς τον άξονα y΄y.

- **<u>Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας</u> :** Αν μια ευθεία (ε): y=αx+β τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο A, τότε τη γωνία ω που διαγράφει η ημιευθεία Ax όταν στραφεί γύρω από το A κατά την θετική φορά μέχρι να πέσει πάνω στην ευθεία (ε), την ονομάζουμε «γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα x΄x».
  Προφανώς είναι: $0^0 < ω < 180^0$
  Ισχύει: **<u>εφω=α</u>**
  Ο αριθμός **<u>εφω=α</u>** καθορίζει την διεύθυνση της ευθείας (ε) και λέγεται **<u>συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε)</u>.**

- **<u>Συνθήκη παραλληλίας δύο ευθειών</u> :** Οι ευθείες $(ε_1)$: $y=α_1x+β_1$ και $(ε_2)$: $y=α_2x+β_2$ είναι παράλληλες αν και μόνο αν έχουν ίσους συντελεστές διεύθυνσης δηλ.
  $(ε_1)$ // $(ε_2)$ αν και μόνο αν $α_1=α_2$

- **<u>Συνθήκη καθετότητας δύο ευθειών</u> :** Οι ευθείες $(ε_1)$: $y=α_1x+β_1$ και $(ε_2)$: $y=α_2x+β_2$ είναι κάθετες αν και μόνο αν το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσής τους είναι ίσο με -1 δηλ.
  $(ε_1)$ κάθετη με $(ε_2)$ αν και μόνο αν $α_1 \cdot α_2=-1$

Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2$

(παραβολή)

Αν α > 0

1. Πεδίο ορισμού : A=IR
2. Σύνολο τιμών : $f(A)=[0,+\infty)$
3. Ακρότατα : Για χ=0 έχουμε y_{min}=f(0)=0
4. Συμμετρίες : Η f έχει πεδίο ορισμού συμμετρικό ως προς το 0 και άρα για κάθε x, -x∈IR έχουμε : f(-x)=f(x) δηλ. είναι άρτια και επομένως συμμετρική ως προς τον y΄y
5. Μονοτονία :

   Στο διάστημα $(-\infty,0)$ αν $x_1 \neq x_2$ έχουμε :

   $$\lambda(x)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{\alpha x_2^2-ax_1^2}{x_2-x_1}=a(x_2+x_1)<0$$

   και άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα.

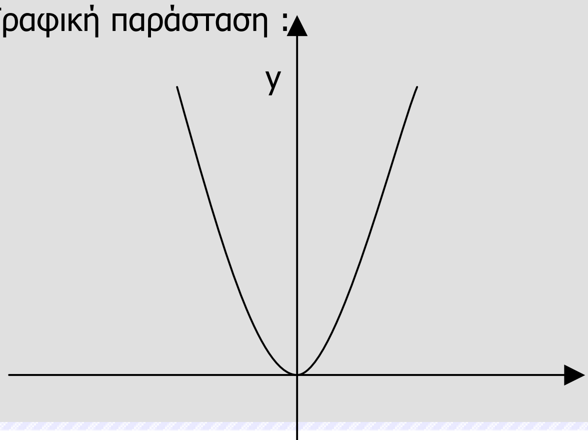
   Στο διάστημα $(0,+\infty)$ αν $x_1 \neq x_2$ έχουμε :

   $$\lambda(x)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{\alpha x_2^2-ax_1^2}{x_2-x_1}=a(x_2+x_1)>0$$

   και άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.
6. Προφανώς όταν ο χ τείνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ τότε το y=f(x) τείνει στο $+\infty$
7. Σημεία τομής με τους άξονες : χ=0⇔y=0
8. Πίνακας μεταβολών :

	$-\infty$		0		$+\infty$
	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

9. Γραφική παράσταση :



Η συνάρτηση $f(x)=\frac{a}{x}$

(υπερβολή)

Αν α > 0

1. Πεδίο ορισμού : $A=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
2. Σύνολο τιμών : $f(A)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
3. Ακρότατα : Δεν υπάρχουν
4. Συμμετρίες : Η f έχει πεδίο ορισμού συμμετρικό ως προς το 0 και άρα για κάθε x, -x∈IR έχουμε : f(-x)= -f(x) δηλ. είναι περιττή και επομένως συμμετρική ως προς την αρχή Ο(0.0) των αξόνων.
5. Μονοτονία :

   Στο διάστημα $(-\infty,0)$ αν $x_1 \neq x_2$ έχουμε :

   $$\lambda(x)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{\frac{\alpha}{x_2^2}-\frac{a}{x_1^2}}{x_2-x_1}=\ldots<0$$

   και άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα.

   Στο διάστημα $(0,+\infty)$ αν $x_1 \neq x_2$ έχουμε :

   $$\lambda(x)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{\frac{\alpha}{x_2^2}-\frac{a}{x_1^2}}{x_2-x_1}=\ldots<0$$

   και άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα.
6. Προφανώς όταν ο χ τείνει στο $-\infty$ ή στο $+\infty$ τότε ο y=f(x) τείνει στο $-\infty$

   Όταν ο χ τείνει στο 0 από αριστερά τότε ο y=f(x) τείνει στο $-\infty$ και όταν ο χ τείνει στο 0 από δεξιά τότε ο y=f(x) τείνει στο $+\infty$
7. Σημεία τομής με τους άξονες:Δεν υπάρχουν
8. Πίνακας μεταβολών :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y=f(x)=a/x	$-\infty$	↘	$+\infty$ $-\infty$	↘	$+\infty$

9. Γραφική παράσταση :

0 x

Αν α < 0

1. Πεδίο ορισμού : A=IR
2. Σύνολο τιμών : $f(A)=(-\infty,0]$
3. Ακρότατα : Για χ=0 έχουμε y_{max}=f(0)=0
4. Συμμετρίες : Η f έχει πεδίο ορισμού συμμετρικό ως προς το 0 και άρα για κάθε x, -x∈IR έχουμε : f(-x)=f(x) δηλ. είναι άρτια και επομένως συμμετρική ως προς τον y΄y
5. Μονοτονία :

Στο διάστημα $(-\infty,0)$ αν $x_1 \neq x_2$ έχουμε :

$$\lambda(x)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{\alpha x_2^2-ax_1^2}{x_2-x_1}=a(x_2+x_1)>0$$

και άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

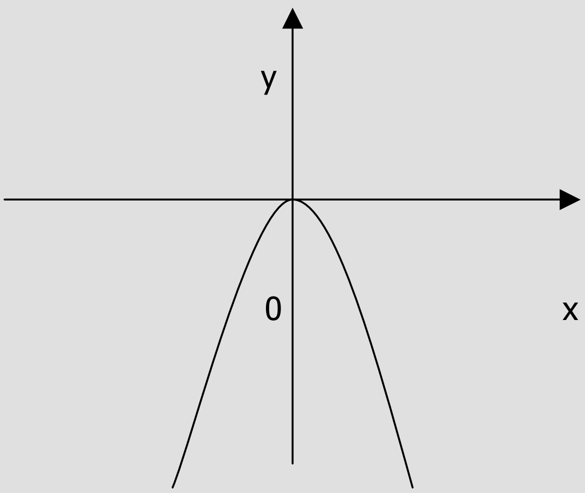
Στο διάστημα $(0,+\infty)$ αν $x_1 \neq x_2$ έχουμε :

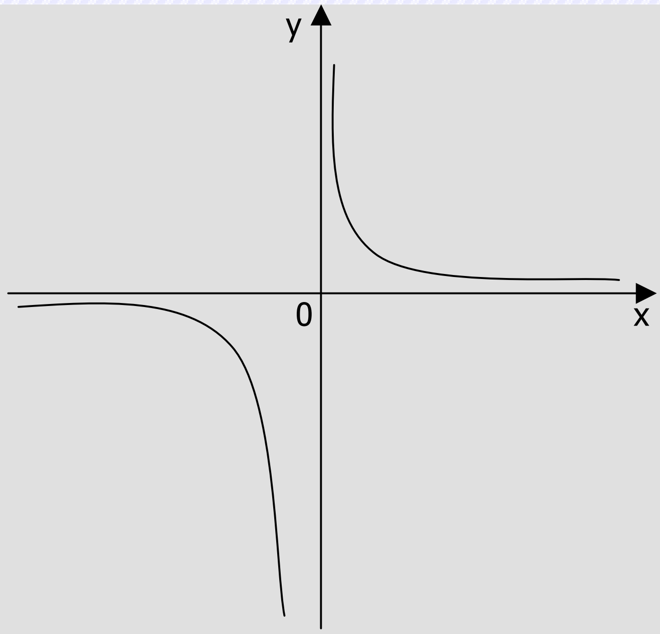
$$\lambda(x)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{\alpha x_2^2-ax_1^2}{x_2-x_1}=a(x_2+x_1)<0$$

και άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα.

6. Προφανώς όταν ο χ τείνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ τότε το y=f(x) τείνει στο $-\infty$
7. Σημεία τομής με τους άξονες : χ=0⇔y=0
8. Πίνακας μεταβολών :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$





Αν α < 0

1. Πεδίο ορισμού : $A=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
2. Σύνολο τιμών : $f(A)=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$
3. Ακρότατα : Δεν υπάρχουν
4. Συμμετρίες : Η f έχει πεδίο ορισμού συμμετρικό ως προς το 0 και άρα για κάθε x, -x∈IR έχουμε : f(-x)= -f(x) δηλ. είναι περιττή και επομένως συμμετρική ως προς την αρχή Ο(0.0) των αξόνων.
5. Μονοτονία :

Στο διάστημα $(-\infty,0)$ αν $x_1 \neq x_2$ έχουμε :

$$\lambda(x)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{\frac{\alpha}{x_2^2}-\frac{a}{x_1^2}}{x_2-x_1}=\ldots>0$$

και άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

Στο διάστημα $(0,+\infty)$ αν $x_1 \neq x_2$ έχουμε :

$$\lambda(x)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{\frac{\alpha}{x_2^2}-\frac{a}{x_1^2}}{x_2-x_1}=\ldots>0$$

και άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

6. Προφανώς όταν ο χ τείνει στο $-\infty$ ή στο $+\infty$ τότε ο y=f(x) τείνει στο $-\infty$
Όταν ο χ τείνει στο 0 από αριστερά τότε ο y=f(x) τείνει στο $-\infty$ και όταν ο χ τείνει στο 0 από δεξιά τότε ο y=f(x) τείνει στο $+\infty$
7. Σημεία τομής με τους άξονες:Δεν υπάρχουν