ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ :

Η έννοια του συνόλου στα μαθηματικά είναι έννοια πρωταρχική και έτσι δεν ορίζεται αυστηρά μαθηματικά. Μπορούμε όμως επεξηγηματικά αντί ορισμού να πούμε:
Σύνολο, είναι μια συλλογή αντικειμένων, διακεκριμένων μεταξύ τους και που η φύση τους μπορεί να είναι οποιαδήποτε. Τα αντικείμενα αυτά τα ονομάζουμε στοιχεία του συνόλου, τα γράφουμε μέσα σε άγκιστρα με οποιαδήποτε σειρά και το καθένα μόνο μια φορά. Το σύνολο το συμβολίζουμε με ένα από τα κεφαλαία γράμματα του αλφαβήτου.
Ένα σύνολο που περιέχει ένα μόνο στοιχείο, λέγεται μονοσύνολο ή μονομελές σύνολο. Αν περιέχει δύο στοιχεία λέγεται διμελές σύνολο, … κ.λ.π. πολυμελές σύνολο. Το σύνολο που δεν περιέχει στοιχεία λέγεται κενό σύνολο και συμβολίζεται με $\varnothing$ ή $\{\ \}$.

Παραδείγματα συνόλων:

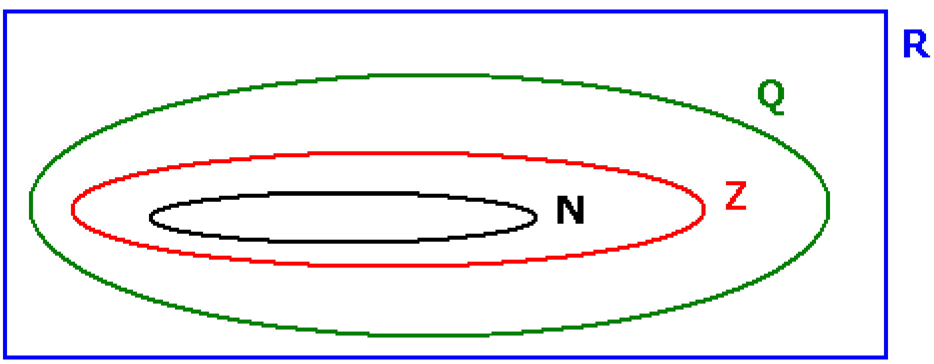
1. Το σύνολο των θετικών ακεραίων που είναι μικρότεροι του 10 :
   A={0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}
2. Το σύνολο των φωνηέντων : Φ={α,ε,ο,η,ι,υ,ω}
3. Το σύνολο των ακεραίων x που είναι 0<x<1 : $B = \varnothing$

Για να δηλώσουμε ότι ένα στοιχείο x είναι στοιχείο ενός συνόλου Σ, γράφουμε: $x \in \Sigma$ και διαβάζουμε « το x ανήκει στο Σ ». Για να δηλώσουμε ότι το στοιχείο x δεν είναι στοιχείο του συνόλου Σ, γράφουμε $x \notin \Sigma$ και διαβάζουμε « το x δεν ανήκει στο Σ ».

Έτσι για τα προηγούμενα σύνολα έχουμε: $1 \in A$ και $\alpha \notin A$, ενώ $1 \notin \Phi$ και $\alpha \in \Phi$.

ΒΑΣΙΚΑ ΣΥΝΟΛΑ:

1. Το σύνολο IN των φυσικών αριθμών: IN={0,1,2,3,4,…} ή IN^*={1,2,3,4,…}
2. Το σύνολο των ακεραίων: Z={…,-3,-2,-1,0,1,2,3,…} ή Z^*={…,-3,-2,-1, 1,2,3,…}
3. Το σύνολο των θετικών ακεραίων: Z^*_+={1,2,3,…} ή Z_+={0, 1,2,3,…}
4. Το σύνολο των αρνητικών ακεραίων: Z^*_+={-1,-2,-3,…} ή Z_+={0,-1,-2,-3,…}
5. Το σύνολο Q των ρητών αριθμών: $Q = \{x / x = \frac{\mu}{\nu}$ όπου μ, ν ακέραιοι με $\nu \neq 0\}$
6. Το σύνολο IRτων πραγματικών αριθμών.



ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΟΛΟΥ:

Ένα σύνολο μπορούμε να το παραστήσουμε με τους εξής τρεις τρόπους:

1. Με αναγραφή των στοιχείων του: Δηλ. μέσα σε άγκιστρα να αναγράψουμε όλα τα στοιχεία του ένα προς ένα.

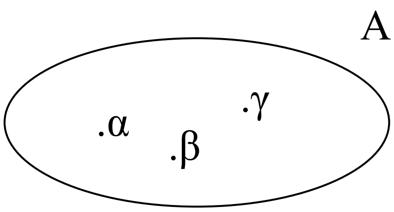
   Π.χ. A={α,1,β,2,γ,3} , B={@,$,%,&}

2. Με περιγραφή των στοιχείων του: Δηλ. να περιγράψουμε τα στοιχεία του με μια κοινή τους χαρακτηριστική ιδιότητα.

   Π.χ Φ={x/x φωνήεν του αλφαβήτου } , K={x/x μαθητής του 4^{ου} Ε.Λ.Π.}

3. Με το διάγραμμα του Venn: Δηλ. μέσα σε μια κλειστή καμπύλη γραμμή να παραστήσουμε με σημεία τα στοιχεία του συνόλου.

   Π.χ



ΙΣΟΤΗΤΑ ΣΥΝΟΛΩΝ:

Ορισμός:

Αν A , B είναι δύο μη κενά σύνολα, θα λέμε ότι το σύνολο A είναι ίσο με το σύνολο B (συμβολικά A=B) αν και μόνο αν έχουν τα ίδια ακριβώς στοιχεία δηλ.

$$A = B \Leftrightarrow (\text{ κάθε } x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Π.χ Τα σύνολα A={1,2,3,4,5,6,7,8,9} και B={x/x θετικός ακέραιος μικρότερος του 10} είναι ίσα και γράφουμε A=B

Ιδιότητες της ισότητας συνόλων

1. A=A για κάθε σύνολο A (αυτοπαθής)
2. A=B = B=A για κάθε σύνολο A και B (συμμετρική)
3. A=B και B=Γ = A=Γ για κάθε A,B,Γ (μεταβατική)

ΥΠΟΣΥΝΟΛΟ ΣΥΝΟΛΟΥ:

Ορισμός:

Αν A , B είναι δύο μη κενά σύνολα, θα λέμε ότι το σύνολο A είναι υποσύνολο του B (συμβολικά $A \subseteq B$) αν και μόνο αν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B δηλ.

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\text{ κάθε } x \in A = x \in B)$$

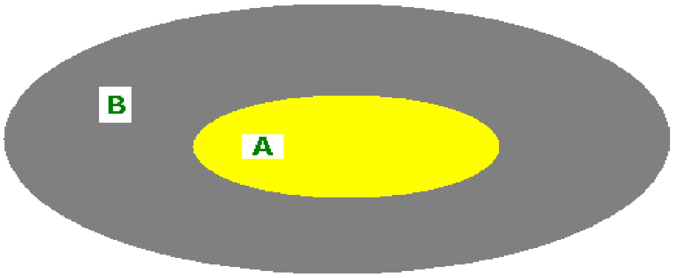
Π.χ. Αν A={1,2,3,4,5,6,7,8,9} και B={1,2,3,4,5} τότε $B \subseteq A$, επίσης $A \subseteq A$

Ορισμός:

Αν A , B είναι δύο μη κενά σύνολα, θα λέμε ότι το σύνολο A είναι γνήσιο υποσύνολο του B (συμβολικά $A \subset B$) αν και μόνο αν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του B και υπάρχει ένα τουλάχιστον στοιχείο του B που δεν ανήκει στο A δηλ.

$$A \subset B \Leftrightarrow (\text{ κάθε } x \in A = x \in B \text{ και υπάρχει } y \in B : y \notin A)$$

Π.χ. Αν A={1,2,3,4,5,6,7,8,9} και B={1,2,3,4,5} τότε $B \subset A$, όμως $A \not\subset A$.



Ιδιότητες των υποσυνόλων

1. $A \subseteq A$ για κάθε σύνολο A
2. $\varnothing \subseteq A$ για κάθε σύνολο A
3. $A \subseteq B$ και $B \subseteq \Gamma$ $=$ $A \subseteq \Gamma$ για κάθε A, B, Γ
4. $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$ $=$ $A = B$ για κάθε A, B
5. $A \not\subset A$ για κάθε σύνολο A
6. $\varnothing \not\subset A$ για κάθε μη κενό σύνολο A
7. $A \subset B$ και $B \subset \Gamma$ $=$ $A \subset \Gamma$ για κάθε A, B, Γ

ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΟΛΩΝ:

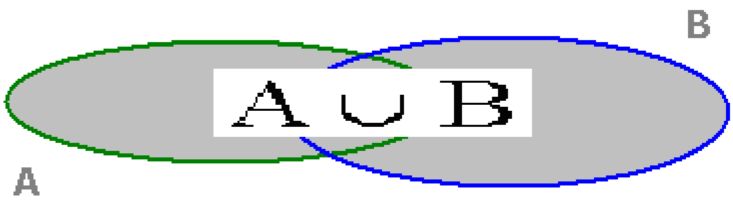
I) ΕΝΩΣΗ ΣΥΝΟΛΩΝ:

Ορισμός:

Ένωση δύο μη κενών συνόλων Α , Β (συμβολικά $A \cup B$) ονομάζουμε το σύνολο που έχει στοιχεία τα κοινά και μη κοινά στοιχεία των δύο συνόλων δηλ.

$A \cup B = \{x \,/\, x \in A \text{ ή } x \in B\}$

Π.χ Αν Α={α,1,β,2,3,0} και Β={α,β,γ,1,2,3,4} τότε $A \cup B = \{\alpha, \beta, \gamma, 0, 1, 2, 3, 4\}$



Ιδιότητες της ένωσης συνόλων

1. $A \cup A = A$ για κάθε σύνολο A
2. $A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A$ για κάθε σύνολο A
3. $A \cup B = B \cup A$ για κάθε A , B
4. $A \subseteq A \cup B$ και $B \subseteq A \cup B$ για κάθε A , B
5. $(A \cup B) \cup \Gamma = A \cup (B \cup \Gamma) = A \cup B \cup \Gamma$ για κάθε A , B , Γ
6. $A \subseteq B =$ $A \cup B = B$

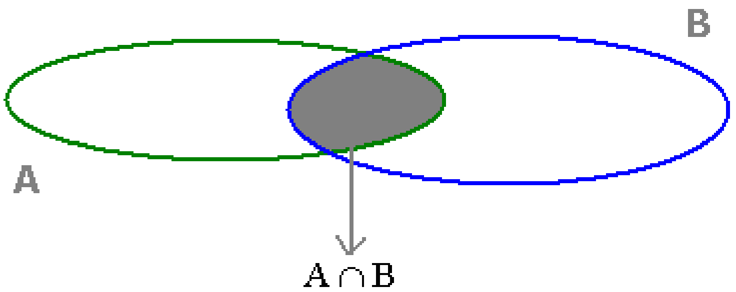
II) ΤΟΜΗ ΣΥΝΟΛΩΝ:

Ορισμός:

Τομή δύο μη κενών συνόλων A , B (συμβολικά $A \cap B$) ονομάζουμε το σύνολο που έχει στοιχεία τα κοινά μόνο στοιχεία των δύο συνόλων δηλ.

$A \cap B = \{x \,/\, x \in A \text{ και } x \in B\}$

Π.χ Αν A={α,1,β,2,3,0} και B={α,β,γ,1,2,3,4} τότε $A \cap B = \{\alpha,\beta,1,2,3\}$



Ιδιότητες της τομής συνόλων

1. $A \cap A = A$ για κάθε σύνολο A
2. $A \cap \varnothing = \varnothing \cap A = \varnothing$ για κάθε σύνολο A
3. $A \cap B = B \cap A$ για κάθε A , B
4. $A \cap B \subseteq A$ και $A \cap B \subseteq B$ για κάθε A , B
5. $(A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma) = A \cap B \cap \Gamma$ για κάθε A , B , Γ
6. $A \subseteq B = \ A \cap B = A$

ΤΥΠΟΙ De Morgan:

1. $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$
2. $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$

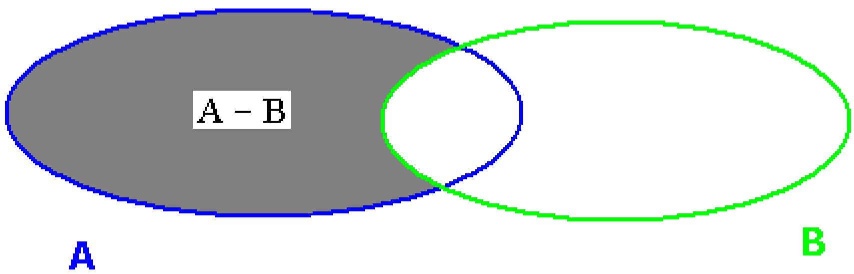
III) ΔΙΑΦΟΡΑ ΣΥΝΟΛΩΝ:

Ορισμός:

Διαφορά δύο μη κενών συνόλων A , B (συμβολικά $A - B$) ονομάζουμε το σύνολο που έχει στοιχεία τα στοιχεία του συνόλου A που δεν ανήκουν στο B δηλ.

$A - B = \{x \,/\, x \in A \text{ και } x \notin B\}$

Π.χ Αν A={α,1,β,2,3,0} και B={α,β,γ,1,2,3,4} τότε $A - B = \{0\}$



ΤΟ ΒΑΣΙΚΟ ΣΥΝΟΛΟ – ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΣΥΝΟΛΟΥ:

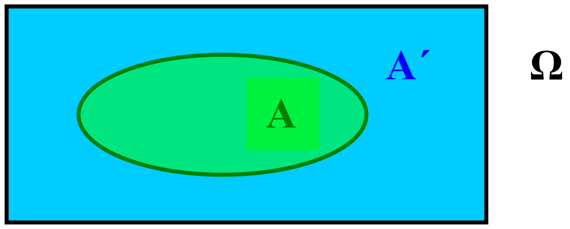
Ορισμός:

Ένα σύνολο που έχει υποσύνολα όλα τα σύνολα με τα οποία εργαζόμαστε το ονομάζουμε βασικό σύνολο και το συμβολίζουμε συνήθως με Ω.

Ορισμός:

Αν Ω είναι ένα βασικό σύνολο και Α ένα υποσύνολο αυτού, ονομάζουμε συμπλήρωμα ή συμπληρωματικό ή αντίθετο του Α (συμβολικά A'), το σύνολο των στοιχείων του Ω που δεν ανήκουν στο Α δηλ.

$A' = \{x / x \in \Omega \text{ και } x \notin A\}$



Π.χ Αν Ω={x / x γράμμα του αλφαβήτου } και Α={ x / x φωνήεν του αλφαβήτου } τότε

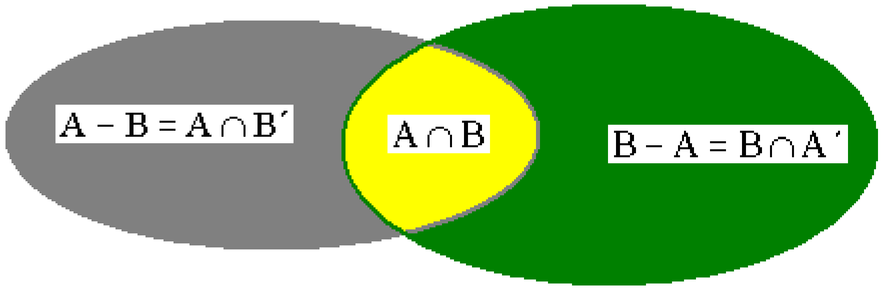
$A' = \{x / x \text{ σύμφωνο του αλφαβήτου}\}$

Ιδιότητες

1. $\Omega' = \varnothing$ και $\varnothing' = \Omega$
2. $(A')' = A$ για κάθε σύνολο Α
3. $A \cup A' = \Omega$ για κάθε σύνολο Α
4. $A \cap A' = \varnothing$ για κάθε σύνολο Α
5. $(A \cup B)' = A' \cap B'$ για κάθε Α , Β
6. $(A \cap B)' = A' \cup B'$ για κάθε Α , Β
7. $A - B = A \cap B'$ για κάθε Α , Β

aris nikolaidis

ΒΑΣΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:



1. $(A - B) \cup (A \cap B) = A$ και $(B - A) \cup (A \cap B) = B$
2. $(A - B) \cap (B - A) = \varnothing$, $(A - B) \cap (A \cap B) = \varnothing$, $(B - A) \cap (A \cap B) = \varnothing$
3. $A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να χαρακτηρίσετε με «Σ» (σωστό) ή «Λ» (λάθος) τις παρακάτω προτάσεις:

$0=\varnothing$		Τα σύνολα $A=\{x / x^2-1=0\}$ και $B=\{x / x\in Z^* \text{ με } -1\leq x\leq 1\}$ είναι ίσα	
$\alpha=\{\alpha\}$		Αν $A=\{x / \lvert x\rvert > 1\}$ και $B=\{x / x\in (1,+\infty)\}$ τότε Α=Β	
$\alpha\in\{\alpha\}$		Αν $A=\{0,\{0\},\varnothing,\{\varnothing\},1\}$ και $B=\{1,\{1\},0,2,\{2\},\varnothing\}$ τότε $A\cup B=\{0,1,2,\{0\},\{1\},\{2\},\{\varnothing\},\varnothing\}$	
$\varnothing\subset\{\alpha\}$		Αν $A=\{0,\{0\},\varnothing,\{\varnothing\},1\}$ και $B=\{1,\{1\},0,2,\{2\},\varnothing\}$ τότε $A\cap B=\{0,1,\{\varnothing\}\}$	
$\{\alpha\}\subseteq\{\alpha,\{\alpha\}\}$		Αν $A=\{0,\{0\},\varnothing,\{\varnothing\},1\}$ και $B=\{1,\{1\},0,2,\{2\},\varnothing\}$ τότε $A-B=\{0,\{\varnothing\}\}$	
Το σύνολο $A=\{\varnothing,1,\alpha\}$ έχει 6 υποσύνολα		Αν $\Omega=\{0,\{0\},\varnothing,\{\varnothing\},1\}$ και $A=\{0,1\}$ τότε $A'=\{\{0\},\varnothing,\{\varnothing\}\}$	

2. Δίνεται το σύνολο Α={α,β,γ,{α,β}}. Να γράψετε το σύνολο όλων των υποσυνόλων του Α

3. Δίνονται τα σύνολα:

   Σ={x / x ακέραια λύση της ανίσωσης $x^2-4\leq 0$ }

   Τ={x /x$\in(-2,0)\cup(0,3)$}.

   Να βρείτε τα: $\Sigma\cup T$, $\Sigma\cap T$, $\Sigma-T$, $T-\Sigma$

4. Αν $\Omega=\{x / x^2-3\lvert x\rvert+2=0\}$ είναι το βασικό σύνολο και $A=\{x / x^2-1=0\}$,

   $B=\{x / x^2-3x+2=0\}$, να βρείτε τα:

   A' , B' , $A\cup B$, $(A\cup B)'$, $A\cap B$, $(A\cap B)'$,

   $A-B$, $A'\cup B$, $(A-B)\cup(B-A)$

aris nikolaidis