

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

$$(a+\beta)^2 = a^2+2a\beta+\beta^2$$

- $(x+1)^2 = x^2+2x+1$
- $(2x+3)^2 = 4x^2+12x+9$
- $(x^2+3y^3)^2 = x^4+6x^2y^3+9y^6$
- $(\frac{3x^3}{2} + xy^2)^2 = \frac{9x^6}{4} + 3x^4y^2 + x^2y^4$

$$(a-\beta)^2 = a^2 - 2a\beta + \beta^2$$

- $(x-3)^2 = x^2-6x+9$
- $(2x+3)^2 = 4x^2-12x+9$
- $(x^2-3y^3)^2 = x^4-6x^2y^3+9y^6$
- $(\frac{3x^3}{2} - xy^2)^2 = \frac{9x^6}{4} - 3x^4y^2 + x^2y^4$

$$(a+\beta)^3 = a^3 + 3a^2\beta + 3a\beta^2 + \beta^3$$

- $(x+1)^3 = x^3+3x^2+3x+1$
- $(2x+3y)^3 = 8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$
- $(x+\frac{1}{x})^3 = x^3 + 3x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}$
- $(xy^2+x^2y)^3 = x^3y^6+3x^4y^5+3x^5y^4+x^6y^3$

$$(a-\beta)^3 = a^3 - 3a^2\beta + 3a\beta^2 - \beta^3$$

- $(x-1)^3 = x^3-3x^2+3x-1$
- $(2x-3y)^3 = 8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$
- $(x-\frac{1}{x})^3 = x^3 - 3x + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}$
- $(xy^2-x^2y)^3 = x^3y^6-3x^4y^5+3x^5y^4-x^6y^3$

$$(a+\beta+\gamma)^2 = a^2+\beta^2+\gamma^2+2a\beta+2a\gamma+2\beta\gamma$$

- $(x+y+1)^2 = x^2+y^2+1+2x+2y+2xy$
- $(x-y+1)^2 = x^2+y^2+1+2x+2y-2xy$
- $(x-y-1)^2 = x^2+y^2+1-2x+2y-2xy$
- $(x^2-y^2-w^2)^2 = x^4+y^4+w^4-2x^2y^2-2x^2w^2+2y^2w^2$

$$a^2 - \beta^2 = (a - \beta)(a + \beta)$$

- $9 - x^2 = (3 - x)(3 + x)$
- $4x^2 - 16y^4 = (2x - 4y^2)(2x + 4y^2)$
- $9(x^2 + x + 1)^2 - (x^2 + 3)^2 =$
 $x(2x + 3)(4x^2 + 3x + 6)$
- $2x^2 - 3 = (\sqrt{2}x - \sqrt{3})(\sqrt{2}x + \sqrt{3})$

$$a^3 - \beta^3 = (a - \beta)(a^2 + a\beta + \beta^2)$$

- $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$
- $x^6 - y^3 = (x^2 - y)(x^4 + x^2y + y^2)$
- $a^3 - 8 = (a - 2)(a^2 + 2a + 4)$
- $x - y = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x^2} + \sqrt{xy} + \sqrt{y^2})$

$$a^4 - \beta^4 = (a - \beta)(a^3 + a^2\beta + a\beta^2 + \beta^3)$$

κ.λ.π

- $x^4 - 1 = (x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$
- $a^5 - 32 = (a - 2)(a^4 + 2a^3 + 4a^2 + 8a + 16)$
- $x^6 - y^6 =$
 $= (x - y)(x^5 + x^4y + x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 + y^5)$
- $x^7 - y^7 =$
 $= (x - y)(x^6 + x^5y + x^4y^2 + x^3y^3 + x^2y^4 + xy^5 + y^6)$

$$a^v - \beta^v = (a - \beta)(a^{v-1} + a^{v-2}\beta + a^{v-3}\beta^2 + \dots + \beta^{v-1})$$

με v θετικό ακέραιο

$$a^3 + \beta^3 = (a + \beta)(a^2 - a\beta + \beta^2)$$

- $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$
- $x^6 + y^3 = (x^2 + y)(x^4 - x^2y + y^2)$
- $a^3 + 8 = (a + 2)(a^2 - 2a + 4)$
- $x + y = (\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x^2} - \sqrt{xy} + \sqrt{y^2})$

$$a^5 + \beta^5 = (a + \beta)(a^4 - a^3\beta + a^2\beta^2 - a\beta^3 + \beta^4)$$

κ.λ.π

- $x^4 + 1 = ***$
- $a^5 + 32 = (a + 2)(a^4 - 2a^3 + 4a^2 - 8a + 16)$
- $x^6 - y^6 = ***$
- $x^7 + y^7 =$
 $= (x + y)(x^6 - x^5y + x^4y^2 - x^3y^3 + x^2y^4 - xy^5 + y^6)$

$$a^v + \beta^v = (a + \beta)(a^{v-1} - a^{v-2}\beta + a^{v-3}\beta^2 - \dots + \beta^{v-1})$$

με v περιττό αριθμό

$$(x+a)(x+\beta) = x^2 + (a+\beta)x + a\beta$$

- $(x+1)(x+3) = x^2 + 4x + 3$
- $(x-2)(x-5) = x^2 - 7x + 10$
- $(x-3)(x+7) = x^2 + 4x - 21$
- $(x+3)(x-2) = x^2 + x - 6$

$$(x+a)(x+\beta)(x+\gamma) =$$

$$= x^3 + (a+\beta+\gamma)x^2 + (a\beta + a\gamma + \beta\gamma)x + a\beta\gamma$$

- $(x+1)(x+2)(x+3) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$
- $(x-1)(x+2)(x+3) = x^3 + 4x^2 + x - 6$
- $(x-1)(x-2)(x+3) = x^3 - 7x + 6$
- $(x-1)(x-2)(x-3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

$$a^3 + \beta^3 + \gamma^3 - 3a\beta\gamma =$$

$$\frac{1}{2}(a + \beta + \gamma)[(a - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - a)^2] =$$

$$(a + \beta + \gamma)(a^2 + \beta^2 + \gamma^2 + a\beta + a\gamma + \beta\gamma)$$

Προφανώς :

Αν $a + \beta + \gamma = 0$ ή $a = \beta = \gamma$ τότε :

$$a^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3a\beta\gamma$$

- $x^3 + y^3 + 1 - 3xy =$
 $(x+y+1)(x^2 + y^2 + 1 + x + y + xy)$
- $(3x-2)^3 + (1-x)^3 + (1-2x)^3 =$
 $= 3(3x-2)(x-1)(2x-1)$

ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

ΚΟΙΝΟΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑΣ :

- $a^2x^2+a^2y^2 = a^2(x^2+y^2)$
- $a(x+y+\omega) - \beta(x+y+\omega) = (x+y+\omega)(a - \beta)$
- $-a(x-1)-(1-x) = -a(x-1)+(x-1) = (x-1)(1-a)$
- $12a^2\beta^3x^4y^3+6a^3\beta^2x^3y^4-9a^2x^2y^5 = 3a^2x^2y^3(4\beta^3x^2+2a\beta^2xy-3y^2)$

ΟΜΑΔΟΠΟΙΗΣΗ :

- $ax+\beta x+ay+\beta y = x(a+\beta)+y(a+\beta) = (a+\beta)(x+y)$
- $ax^2+\beta x^2+\gamma x^2+ax+\beta x+\gamma x+a+\beta+\gamma =$
 $= x^2(a+\beta+\gamma)+x(a+\beta+\gamma)+(a+\beta+\gamma) = (a+\beta+\gamma)(x^2+x+1)$

ΔΙΑΦΟΡΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ :

- $9x^2-16y^2 = (3x-4y)(3x+4y)$
- $25(x^2+1)^2-9(x^2+3)^2 = \dots = 4(x^2-2)(4x^2+7)$
- $x^4-y^6 = (x^2-y^3)(x^2+y^3)$
- $x^2-2 = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΑΥΤΟΤΗΤΩΝ :

- $x^2+4x+4 = (x+2)^2$
- $4x^4-12x^2+9 = (2x^2-3)^2$
- $x^3+3x^2+3x+1 = (x+1)^3$
- $x^3-8 = (x-2)(x^2+2x+4)$

ΤΡΙΩΝΥΜΟ :

- $X^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$
- $2x^2+3x-5 = (x-1)(2x+5)$
- $x^4-5x^2+4 = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$
- $3x^2+6x = 3x(x+2)$
- $2x^2-5 = (\sqrt{2}x-\sqrt{5})(\sqrt{2}x+\sqrt{5})$
- $x^2+x+1 = ***$
- $-x^2-3 = ***$

ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΣ ΤΩΝ
ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΩΝ
ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΩΝ :

- $3x^3 - 27x = 3x(x^2 - 9) = 3x(x - 3)(x + 3)$
- $x^5 - 10x^3 + 9x = x(x^4 - 10x^2 + 9) = x(x^2 - 1)(x^2 - 9) = x(x - 1)(x + 1)(x - 3)(x + 3)$
- $x^2 - y^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2 - y^2 = (x + y + 2)(x - y + 2)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Αποδεικτικές Σχέσεις :

I) Να αποδείξετε ότι :

1. $(3x + 2)^2 - (2x + 3)^2 = 5(x + 1)(x - 1)$

2. $(x + y)^3 - (x - y)^3 = 2y(3x^2 + y^2)$

3. $(x + 4)^2 + (2x + 3)^2 - (2x + 5)^2 = x^2$

4. Να αποδείξετε ότι :

i) $x^3 - y^3 = (x - y)^3 + 3xy(x - y)$ και στην συνέχεια

ii) να βρείτε την διαφορά των κύβων δύο αριθμών αν είναι γνωστό ότι η διαφορά τους είναι 3 και το γινόμενο τους 10.

II) Να απλοποιήσετε τα κλάσματα :

1. $A = \frac{x^2 - 8x + 16}{x^2 - 16}$

2. $B = \frac{4x^2 + 4xy + 4xw}{xy + y^2 + yw}$

3. $K = \frac{x^3 - 5x^2 + 4x}{x^2 - x}$

$$4. \Lambda = \frac{x^2 - ax + \beta x - a\beta}{x^2 - 3ax + 2a^2}$$

III) Να κάνετε τις πράξεις :

$$1. \frac{x-y}{x+y} \cdot \frac{x^2 + 2xy + y^2}{8y - 8x}$$

$$2. \frac{x^2 + xy}{y} : \frac{y^2 - x^2}{2y^2}$$

$$3. \frac{\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}}{\frac{x+y}{x-y}}$$

$$4. \frac{2x+3}{2x-2} - \frac{3x-2}{3x+3} + \frac{5}{6-6x^2}$$

$$5. \left(\frac{5x-3y}{15a} - \frac{9x-8y}{12\beta} \right) : \left(\frac{4\beta-9\alpha}{4y} - \frac{3\beta-10\alpha}{5x} \right)$$

Υπολογιστικές ασκήσεις :

1. Αν $x+y=5$ και $xy=6$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης $K=x^2+y^2$.

2. Αν $x = \sqrt{5} + \sqrt{3}$ και $y = \sqrt{5} - \sqrt{3}$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης $K=3x^2 - 7xy + 3y^2$.

3. Αν $x + \frac{1}{x} = 5$, υπολογίστε την τιμή των παραστάσεων

$$K = x^2 + \frac{1}{x^2} \quad \text{και} \quad \Lambda = x^3 + \frac{1}{x^3}$$

Εξισώσεις – Ανισώσεις :

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις και ανισώσεις :

$$1. \quad 2 \cdot \frac{1-x}{3} - \frac{x-2}{6} = 2 \left[x - \left(1 - \frac{x}{2} \right) \right]$$

$$2. \quad 2 \cdot \frac{1-x}{3} - \frac{x-2}{6} \leq \frac{x}{2} + 2$$

$$3. \quad \begin{cases} 1 - \frac{x-1}{3} \leq x-2 \\ \text{και} \\ 2(1-x) < \frac{2x}{3} \end{cases}$$

$$4. \quad 3x^2 - 2x + 5 = 0 \quad , \quad 4x^2 - 4x + 1 = 0 \quad , \quad 4x^2 - x - 5 = 0$$

$$5. \quad x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \quad , \quad x^3 - 5x^2 + 6 = 0 \quad , \quad 2x^3 - 8x = 0$$

$$6. \quad x^2 + 24x + 7 = (x+8)^2 - 4(x-8)^2$$

$$7. \quad \frac{x-2}{2x} = \frac{2}{2-x} + \frac{4}{x^2 - 2x}$$

$$8. \quad \frac{x^2}{x-1} + \frac{1}{1-x} = 1$$

$$9. \quad \frac{x+2}{x-2} + \frac{2}{2x-x^2} = \frac{1}{x}$$

$$10. \quad \frac{x+2}{x+1} - \frac{x-3}{1-x} = \frac{2x^2+3x}{x^2-1}$$

Συστήματα :

Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα :

$$1. \quad \begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$$

$$2. \quad \begin{cases} 2x + y = 1 \\ x^2 + y^2 - xy = 3 \end{cases}$$