

Η Εκθετική Συνάρτηση

(Εξισώσεις – Ανισώσεις – Συστήματα)

$$f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty) : x \rightarrow y = f(x) = a^x, \alpha > 0$$

Αν $a > 1$ τότε:

1. Η $f(x)=a^x$ είναι "1-1" δηλ.

$$x_1 = x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} = a^{x_2}$$

2. Η $f(x)=a^x$ είναι γνησίως
αύξουσα δηλ.

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$$

3. Ισχύουν όλες οι γνωστές
ιδιότητες των δυνάμεων

Αν $0 < a < 1$ τότε:

1. Η $f(x)=a^x$ είναι "1-1" δηλ.

$$x_1 = x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} = a^{x_2}$$

2. Η $f(x)=a^x$ είναι γνησίως
φθίνουσα δηλ.

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$$

3. Ισχύουν όλες οι γνωστές
ιδιότητες των δυνάμεων

Αν $a > 1$ τότε η $f(x)=1$ δηλ. είναι σταθερή συνάρτηση.

Σχόλια :



Μορφές Εκθετικών Εξισώσεων

1. Μορφή $a^x = \beta$, όπου $a, \beta > 0$ και $a \neq 1$

Αν ο β είναι (ή μπορεί να μετατραπεί σε) δύναμη του a , δηλ. $\beta = a^k$, έχουμε : $a^x = a^k$
 $\Leftrightarrow x = k$

Αν ο β δεν είναι (ή δεν μπορεί να μετατραπεί σε) δύναμη του a , τότε : $a^x = \beta \Leftrightarrow$
 $\log(a^x) = \log \beta \Leftrightarrow x = \log \beta / \log a$

2. Μορφή $a^{f(x)} = \beta$, όπου $a, \beta > 0$ και $a \neq 1$

Περίπτωση όμοια με την προηγούμενη

3. Μορφή $f(a^x)=g(a^x)$, όπου $a>0$

Συνήθως αντιμετωπίζονται με τον μετασχηματισμό $a^x=y$.

4. Μορφή $f(a^x)=g(\beta^x)$, όπου $a>0$

Διαιρούμε και τα δύο μέλη με β^x και κάνουμε τον μετασχηματισμό : $(a/\beta)^x=y$.

5. Μορφή $\{f(x)\}^{g(x)}=1$, όπου $f(x)$, $g(x)$ πολυωνυμικές συναρτήσεις.

Θα πρέπει $f(x)=1$ ή $[g(x)=0$ και $f(x)\neq 0]$

1. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

$\left(\frac{3}{4}\right)^{3x-7} = \left(\frac{4}{3}\right)^{7x-3}$	$3^x - 4 \cdot 3^{\frac{x}{2}} + 3 = 0$
$2 \cdot 9^x - 7 \cdot 3^x + 3 = 0$	$5^{x-1} = 2 + \frac{3}{5^{x-2}}$
$2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x-1} + 2^{x-2} = 54$	$3 \cdot 2^{x-4} + 6 \cdot 5^{x-3} = 2^{x-1} + 5^{x-2}$
$3 \cdot 2^{x-4} + 6 \cdot 5^{x-3} = 2^{x-1} + 5^{x-2}$	$2 \cdot 9^x - 3^{x+1} - 135 = 0$
$18^{8-4x} = (54 \cdot \sqrt{2})^{3x-2}$	$7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$
$4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$	$2 \cdot 4^x + 3 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$
$(x^2 - 5x + 6)^{x(x-2)} = 1$	$x^x - x^{-x} = 3(1 + x^{-x})$
$5^{x-2} - 3 \cdot 2^{x-3} = 12 \cdot 5^{x-3} - 2^x$	$2^{\frac{6x-13}{2}} - 3^{2(x-2)} = 8^{\frac{2x-3}{2}} - 3^{2x-3}$

2. Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

$\begin{cases} 2^{3x+y} = 32 \\ 3^{2x-y} = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} 4^{2x-9} \cdot 2^{3y-2} = 1024 \\ 3^{x-2} \cdot 3^{y-3} = \frac{1}{9} \end{cases}$
$\begin{cases} 3^x - 2^{y+3} = 15 \\ 2^y - 3^{x-3} = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} 5^x - 4^{y+1} = 9 \\ 5^{x-1} - 4^{y+2} = 69 \end{cases}$
$\begin{cases} 9 \cdot 5^x + 7 \cdot 2^{x+y} = 457 \\ 6 \cdot 5^x - 14 \cdot 2^{x+y} + 890 = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x^y = y^x \\ x = y^2 \end{cases}$
$\begin{cases} 5^x \cdot 8^y = 512000 \\ x + y = 7 \end{cases}$	

3. Ι) Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \left(\frac{3-a}{2a-1}\right)^x$. Να βρείτε το a , ώστε η f να είναι

γνησίως αύξουσα.

ΙΙ) Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \left(\frac{a-3}{a+2}\right)^x$. Να βρείτε το a , ώστε η f να

είναι γνησίως φθίνουσα.

4. Να κάνετε τη γραφική παράσταση των παρακάτω συναρτήσεων και από το διάγραμμά τους να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας, τα ακρότατά τους, τα σημεία τομής με τους άξονες και το σύνολο τιμών τους.

$f(x)=e^x+1$	$f(x)=e^{x+1}$	$f(x)=e^{-x}+1$
$f(x)= e^x-2 $	$f(x)=e^{ x }$	$f(x)=1/e^x$