# Η Λογαριθμική Συνάρτηση

# ( Εξισώσεις – Ανισώσεις – Συστήματα )

| Θυμηθείτε… | | |
|---|---|---|
| $\log_a : (0,+\infty) \to R : x \to y = \log_a x ,\ 0 < \alpha \neq 1$<br>όπου y η μοναδική λύση της εξίσωσης: $a^y=x$ $(0<\alpha\neq 1)$ | | Ειδική περίπτωση<br>Νεπέριος – Δεκαδικός<br>Λογάριθμος ( 2<e<3 ) |
| $\log_a x=y \Leftrightarrow a^y=x$<br>με $x>0$ , $0<\alpha\neq 1$ | $\log_\beta x = \dfrac{\log_a x}{\log_a \beta}$<br>με $x>0$ , $0<\alpha,\neq 1$ | $\ln x=y \Leftrightarrow e^y=x$<br>$\log x=y \Leftrightarrow 10^y=x$<br>με $x>0$ |
| $\log_a a=1$ , $\mathrm{Log}_a 1=0$<br>με $0<\alpha\neq 1$ | $\log_a \beta = \dfrac{1}{\log_\beta \alpha}$<br>με $0<\alpha,\beta\neq 1$ | $\ln e=1$ , $\ln 1=0$<br>$\log 10=1$ , $\log 10=0$ |
| $a^{\log_a x} = x$ , $\log_a a^x=x$<br>με $x>0$ , $0<\alpha\neq 1$ | Αν $\alpha>1$ τότε η $f(x)=\log_a x$ είναι γνησίως αύξουσα δηλ<br>$0<x_1<x_2$ ➔ $\log x_1<\log x_2$ | $e^{\ln x}=x$ , $\ln e^x=x$<br>$10^{\log x}=x$ , $\log 10^x x$<br>με $x>0$ |
| $\log_a(xy)= \log_a x+ \log_a y$<br>με $x , y>0$ , $0<\alpha\neq 1$ | Αν $0<\alpha \neq 1$ τότε η $f(x)=\log_a x$ είναι γνησίως φθίνουσα δηλ<br>$0<X_1<x_2$ ➔ $\log x_1>\log x_2$ | $\ln(xy)=\ln x+\ln y$<br>$\log(xy)=\log x+\log y$<br>με $x , y>0$ |
| $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$<br>με $x , y>0$ , $0<\alpha\neq 1$ | Η $f(x)=\log_a x$ είναι «1-1» δηλ.<br>$0<x_1=x_2 \Leftrightarrow \log x_1=\log x_2$ | $\ln \dfrac{x}{y} = \ln x - \ln y$<br>με $x , y>0$ |
| $\log_a x^k = k \cdot \log_a x$ , $k \in R$<br>με $x>0$ , $0<\alpha\neq 1$ | Είναι αντίστροφη με την $f(x)=a^x$ ( συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$) | $\ln x^k = k \cdot \ln x$ , $k \in R$<br>με $x>0$ |
| $\log_a \sqrt[\nu]{x^\mu} = \dfrac{\mu}{\nu} \cdot \log_a x$<br>με $x>0$ , $0<\alpha\neq 1$ | $a^{\log_\beta \gamma} = \gamma^{\log_\beta a}$<br>$0<\alpha,\beta,\gamma\neq 1$ | $\ln \sqrt[\nu]{x^\mu} = \dfrac{\mu}{\nu} \cdot \ln x$<br>με $x>0$ |

Σχόλια :

1. Η εξίσωση $\log_a f(x)=k$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση: $f(x)=a^k$ , με τον περιορισμό $f(x)>0$.
2. Αν η εξίσωση είναι της μορφής $f(\log_a x)=0$ μπορούμε να κάνουμε τον μετασχηματισμό $y=\log_a x$, οπότε η εξίσωση γίνεται: $f(y)=0$
3. Η εξίσωση $\log_{a(x)} f(x)=\log_{a(x)} g(x)$ είναι ισοδύναμη με την $f(x)=g(x)$ και τους περιορισμούς $0<a(x)\neq 1$ , $f(x)>0$ , $g(x)>0$
4. Αν η εξίσωση που θέλουμε να λύσουμε περιέχει λογαρίθμους με διαφορετικές βάσεις, τότε συνήθως μετατρέπουμε τους λογαρίθμους αυτούς στην ίδια βάση.

   Αντίστοιχα και για τις ανισώσεις (προσοχή στην μονοτονία των συναρτήσεων )

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

| | | |
|---|---|---|
| $f(x)=\log_2(1-x)$ | $f(x)=\log_x(1-x^2)$ | $f(x)=\log_{x^2-1}(1-x)$ |
| $f(x)=\dfrac{1}{\log^2 x-3\log x+2}$ | $f(x)=\dfrac{1}{2\lvert\log x\rvert-1}$ | $f(x)=\sqrt{1-\lvert\log x\rvert}$ |
| $f(x)=\sqrt{2\log^2 x+\log x-3}$ | $f(x)=\log[1-\sqrt{x}]$ | $f(x)=\sqrt{\log^3 x-3\log x+2}$ |
| $f(x)=\ln(5x-x^2-6)$ | $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{x+1}$ | $\ln\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ |
| $f(x)=\sqrt{\ln(x-1)}$ | $f(x)=\sqrt{\ln x-1}$ | $f(x)=\sqrt{\ln[\ln(\ln x)]}$ |

2. Στην παράσταση $K=\log\sqrt{\dfrac{3\cdot a^2\cdot\sqrt[4]{\beta^2\cdot\gamma}}{5\cdot\beta^2\cdot\sqrt[3]{\alpha^2\cdot\beta\cdot\gamma}}}$ να εφαρμόσετε όλες τις δυνατές ιδιότητες των λογαρίθμων.

3. Αποδείξτε ότι: $\dfrac{7}{16}\cdot\log(3+2\sqrt{2})-4\cdot\log(\sqrt{2}+1)=\dfrac{25}{8}\cdot\log(\sqrt{2}-1)$

4. Αν α , β>1 να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$K=\log(a^2-1)+\log(\beta^2-1)-\log[(ab+1)^2-(a+\beta)^2]$$

5. Δίνεται η ακολουθία ($a_\nu$) με $a_\nu=\log 3^\nu$. Να δείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι αριθμητική πρόοδος. Βρείτε το άθροισμα των 2ν πρώτων όρων της.

6. Αριθμητικής προόδου ο πρώτος όρος είναι lnα και ο δεύτερος όρος της lnβ (με α , β>0). Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των ν πρώτων όρων μετά τον $a_\nu$ είναι $S=\sqrt{\dfrac{\beta^{\nu^2}}{\alpha^{\nu(\nu-2)}}}$.

7. Αν χ , ψ , ω είναι διαδοχικοί όροι αρμονικής προόδου ( δηλ. ακολουθίας που οι αντίστροφοι των όρων της αποτελούν αριθμητική πρόοδο ), να δείξετε: $\log(x+\psi)+\log(x-2\psi+\omega)=2\log(x-\omega)$

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

| | |
|---|---|
| $\frac{1}{2}\log(x+2)+\log\sqrt{x-3)}=1+\log\sqrt{3}$ | $\sqrt{x^{\log\sqrt{x}}}=10$ |
| $\log(x+1)+2\cdot\log\sqrt{5x}=2$ | $\log_{\sqrt{2}}(2\cdot\log_4 x\cdot\log_2 x+\log_{\sqrt{2}} x)=6$ |
| $\log(x+1)+2\cdot\log\sqrt{5x}=2$ | $\frac{1}{3}\cdot\log(x-2)+\log\sqrt{4x+3}=\frac{2}{3}$ |
| $\log\frac{2x}{3}+\log(\frac{5x}{4}+2)=2\cdot\log(x-1)$ | $\log[\log(2x^2+x-11)]=0$ |
| $\frac{\log x}{\log x+2}+\frac{\log x+3}{\log x-1}=\frac{11}{2}$ | $\log_2(\log_2 x)=\log_4(\log_4 x)$ |
| $2\cdot\log_x^2 8+\log_x 64+\log_x 8=9$ | $\log_x\sqrt[3]{625}-\log_x\sqrt{125}+\frac{1}{6}=0$ |
| $\log(2^x+2\cdot 3^x)+\log 81=x\cdot\log 3+\log 178$ | $\log_2 x+\log_3 x=\log_3 2\cdot\log_2 36$ |

8. Να λύσετε τις ανισώσεις:

| | |
|---|---|
| log[log(logx)]<0 | ln[ln(lnx)] $\leq$ 0 |
| $\log\sqrt{x} \geq \sqrt{\log x}$ | $\ln^4 x - 5\ln^2 x + 4 \leq 0$ |
| $\log x^2 < (\log x)^2$ | $\ln^3 x - 6\ln^2 x + 11\ln x - 6 < 0$ |
| $\log_{\frac{1}{5}}(x^2+2x-1) > 0$ | $\dfrac{1-\log x+\log(x+3)}{1-\log x} \geq 2$ |
| $\dfrac{\log(x^2-4x+3)-1}{\sqrt{x-2}+2} < 0$ | $2\cdot\log_2 x - 3\cdot\log_3 x \leq 4$ |
| $\sqrt{\ln x}-1 \leq 0$ | $\dfrac{1+\log_a^2 x}{1+\log_a x} > 1$ με $0<\alpha<1$ |

9. Να λύσετε τα συστήματα :

| | |
|---|---|
| $\begin{cases} 2x-y=0 \\ \log x - 2\log y + \log 2 = 0 \end{cases}$ | $\begin{cases} 2\ln x + \ln y - 4 = 0 \\ \ln x - 2\ln y + 3 = 0 \end{cases}$ |
| $\begin{cases} \log(xy) = 4\log 2 \\ \log x \cdot \log y = 3\log^2 2 \end{cases}$ | $\begin{cases} \log_5 x + 3^{\log_3 y} = 7 \\ xy = 5^{12} \end{cases}$ |
| $\begin{cases} \ln x - \ln y = 1 \\ \ln x^2 + \ln y^2 = \ln 32 \end{cases}$ | $\begin{cases} x^{\log y} = 4 \\ xy = 40 \end{cases}$ |
| $\begin{cases} x^{\log y} + y^{\log x} = 20 \\ \log\sqrt{xy} = 1 \end{cases}$ | $\begin{cases} \log y = 2\log x \\ xy = 8 \end{cases}$ |
| $\begin{cases} \|x-2\| > 1 \\ \log_x x > x \end{cases}$ | $\begin{cases} \log_x(\log_2 x) > 0 \\ \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2-4x+3} < 0 \end{cases}$ |

10. Να παραστήσετε γραφικά τις παρακάτω συναρτήσεις και από το διάγραμμά τους να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας τους , τα ακρότατά τους , τα σημεία τομής με τους άξονες και το σύνολο τιμών τους.

| | | |
|---|---|---|
| f(x)=lnx+1 | f(x)=ln(x+1) | f(x)=ln(x-2)+1 |
| f(x)=- lnx | f(x)=\| lnx \| | f(x)=ln\|x\| |