Ασκήσεις στα Πολυώνυμα

1. Δίνονται τα πολυώνυμα $P_1(\chi)$, $P_2(\chi)$ και $P_3(\chi)$, από τα οποία τα $P_1(\chi)$ και $P_2(\chi)$ δεν έχουν κοινή ρίζα. Αν ισχύει $(P_1(\chi))^2+(P_2(\chi))^2=(P_3(\chi))^2$ για κάθε $\chi\in R$, να αποδείξετε ότι το $P_3(\chi)$ δεν έχει πραγματικές ρίζες.

   (Υπόδειξη: Αν το $P_3(\chi)$ είχε πραγματική ρίζα ρ , τότε $(P_1(\rho))^2+(P_2(\rho))^2=0$ δηλ. $P_1(\rho)=P_2(\rho)=0$, άτοπο.)

2. Δίνεται το πολυώνυμο $P(\chi)=\chi^2+\kappa\chi+\lambda$ με $\lambda , \kappa\in R$. Αν το $P(\chi)-\chi$ έχει ρίζες ρ_1 , ρ_2 , να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(P(\chi))-\chi$ έχει και αυτό ρίζες ρ_1 , ρ_2 . Αν $\rho_1=1$ και $\rho_2=-1$ να υπολογίσετε τους αριθμούς κ , λ.

3. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(\chi)=2\chi^2-1$, $Q(\chi)=3\chi-1$ και $F(\chi)=3\alpha\chi^2+2\beta\chi+\gamma-\alpha$. Να προσδιορίσετε τους α , β , γ $\in R$ ώστε $P(Q(\chi-1))=F(\chi+1)$ για κάθε $\chi\in R$.

4. Αν α+β+γ=24, να υπολογίσετε τους α , β , γ $\in R$, ώστε το κλάσμα $\dfrac{(a-2)x^2-(4-\beta)x+\gamma-6}{x^2+2x+3}$ να έχει σταθερή τιμή για κάθε $\chi\in R$.

   (Υπόδειξη: Αν $\kappa\in R$ ώστε $\dfrac{(a-2)x^2-(4-\beta)x+\gamma-6}{x^2+2x+3}=\kappa$ ….)

5. Προσδιορίστε τους πραγματικούς αριθμούς α , β , ώστε το πολυώνυμο $P(\chi)=4\chi^4+\alpha\chi^3+2\chi^2+\beta\chi+1$ να είναι το τετράγωνο ενός άλλου πολυωνύμου. Μετά για την μικρότερη τιμή του α που θα βρείτε να λύσετε την ανίσωση $P(\chi)<4$.]

Aris Nikolaidis

6. Αν για το πολυώνυμο $P(\chi)$ ισχύουν: $P(2000)=2000$ και $P(\chi)=P(2000-\chi)$ για κάθε $\chi \in R$, να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(\chi):[\chi(\chi-2000)]$

   (Υπόδειξη: Επειδή ο διαιρέτης $\chi(\chi-2000)$ είναι $2^{ου}$ βαθμού το υπόλοιπο θα είναι της μορφής $\upsilon(\chi)=\alpha\chi+\beta$ και άρα θα έχουμε: $P(\chi)=\chi(\chi-2000)\Pi(\chi)+\alpha\chi+\beta$ για κάθε $\chi \in R$.
   Έτσι $P(0)=\beta$ και $P(2000)=2000^{\alpha}+\beta$. Όμως από την υπόθεση $P(2000)=P(0)$ ….. $\upsilon(\chi)=2000$)

7. ι) Να προσδιορίσετε πολυώνυμο $P(\chi)$ $2^{ου}$ βαθμού τέτοιο ώστε να είναι $P(0)=0$ και $P(\chi)-P(\chi-2)=4\chi$ για κάθε $\chi \in R$.
   ιι) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $P(\chi)$ που βρήκατε, στο διάστημα $(-2,0)$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα $\chi'\chi$.

8. Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς κ , λ ώστε το πολυώνυμο $P(\chi)=(\kappa^2-\lambda^2)\chi^{2000}+2(\lambda^2-\lambda-\kappa)\chi+2$ να έχει παράγοντα το $\chi-1$.

9. Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς κ , λ ώστε το πολυώνυμο $P(\chi)=\chi^3+2\kappa\chi^2+\lambda\chi+\mu-1$ να έχει παράγοντα το $x(x-1-\sqrt{2})$.

10. Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α , β ώστε το πολυώνυμο $P(\chi)=\alpha\chi^{\nu+1}+\beta\chi^{\nu}+1$ να διαιρείται με το $(\chi-1)^2$.

11. Δίνονται τα πολυώνυμα $f(\chi)=2\chi^3+\chi^2-\chi$ και $g(\chi)=3\chi^2+2\chi-1$. Να λύσετε την εξίσωση: $(f(\chi))^2+(g(\chi))^2=0$

12. Αν το $(\chi-\rho)^2$ είναι παράγοντας του $P(\chi)=\chi^3+\alpha\chi^2+\beta\chi+\gamma$, να δείξετε ότι ο ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $\alpha\chi^2+2\beta\chi+3\gamma=0$

(<u>Υπόδειξη</u>: Το χ-ρ θα διαιρεί το P(χ) δηλ. P(ρ)=0 δηλ. $γ=-ρ^3-αρ^2-βγ$ καθώς και το πηλίκο Π(χ) της διαίρεσης P(χ):(χ-ρ) δηλ. Π(ρ)=0. Έτσι $P(χ)=χ^3+αχ^2+βχ-ρ^3-αρ^2-βρ$ ή $P(χ)=(χ-ρ)[χ^2+(ρ+α)χ+ρ^2+αρ+β]$. Άρα το πηλίκο είναι $Π(χ)=χ^2(ρ+α)χ+ρ^2αρ+β$. Π(ρ)=0 ➔ $3ρ^2+2αρ+β=0$ …. ➔ $αρ^2+2βρ+3γ=0$)

13. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης P(χ):(χ-1) με $P(χ)=χ^{2000}+αχ^{1999}+αχ^{1998}+…+αχ+α$, είναι 2001 να υπολογίσετε το α.

14. Αν για το P(χ) ισχύει P(2)=4α+2β+18 και P(-2)=4α-2β+2 , να βρείτε τις τιμές των α , β ώστε τα Q(χ)=P(χ+1)+2αχ+β και F(x)=P(χ-1)-2αχ+β να έχουν παράγοντα αντίστοιχα το χ-1 και το χ+1.

15. Να προσδιορίσετε πολυώνυμο P(χ) 3ου βαθμού αν είναι γνωστό ότι P(0)=0 και $P(χ)-P(χ-1)=χ^2$ για κάθε $χ\in R$. Μετά να δείξετε ότι $1^2+2^2+3^2+…+ν^2=P(ν)$.

16. Αν η διαίρεση του πολυωνύμου P(χ) δια του (χ+1)(χ-3)(χ+2) δίνει υπόλοιπο $υ(χ)=2χ^2+3χ-1$, να βρείτε τα υπόλοιπα των διαιρέσεων P(χ):(χ+1) , P(χ):(χ-3) , P(χ):(χ+2)

17. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(χ)=χ^4-5χ^3+6χ^2-χ-1$ διαιρείται δια του $(χ-1)^2$.

18. Να προσδιορίσετε τους α , β $\in R$, ώστε για κάθε $χ\neq 4$ και $χ\neq 1$ να ισχύει:

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+4}=\frac{a}{x-4}+\frac{\beta}{\chi-1}$$