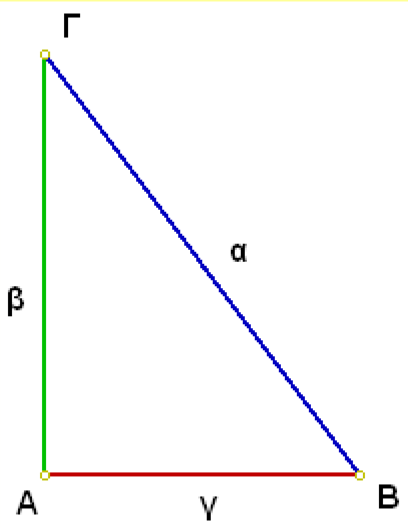
Τριγωνομετρία

Στο ορθογώνιο τρίγωνο :

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ

($\hat{A} = 90^0$) ισχύουν:



$\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$ (Πυθαγόρειο Θεώρημα)

$$\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^0$$

$$\eta\mu B = \frac{\beta}{\alpha}$$

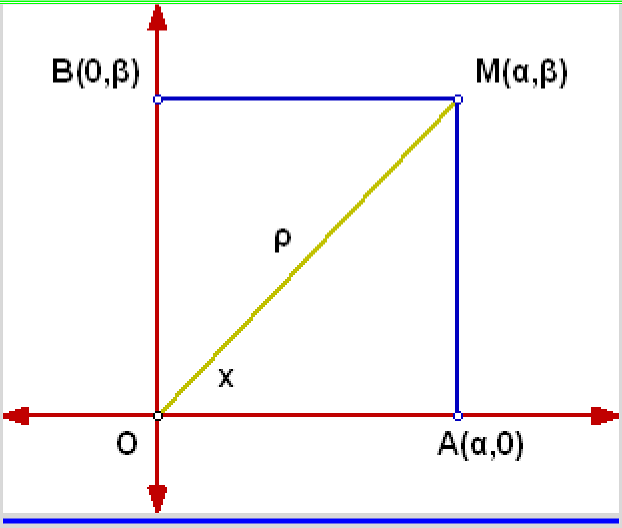
$$\sigma\upsilon\nu B = \frac{\gamma}{\alpha} \quad , \quad \sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\varepsilon\phi B = \frac{\beta}{\gamma}$$

Για την μετατροπή μοιρών (μ^0) σε ακτίνια (α) και αντίστροφα χρησιμοποιούμε τον τύπο : $\frac{a}{\mu} = \frac{\pi}{180}$

Μοίρες	Ακτίνια (rad)	Τριγωνομετρικοί αριθμοί βασικών γωνιών	
0^0	0	ημ0^0 = συν90^0=0	εφ0^0=σφ90^0=0
30^0	π/6	ημ30^0 = συν60^0= $\frac{1}{2}$	εφ30^0=σφ60^0= $\frac{\sqrt{3}}{3}$
45^0	π/4	ημ45^0 = συν45^0= $\frac{\sqrt{2}}{2}$	εφ45^0=σφ45^0=1
60^0	π/3	ημ60^0 = συν30^0= $\frac{\sqrt{3}}{2}$	εφ60^0=σφ30^0= $\sqrt{3}$
90^0	π/2	ημ90^0 = συ0^0=1	εφ90^0=σφ0^0= δεν ορίζεται
120^0	2π/3	ημ180^0=0	εφ180^0=εφ360^0=0
150^0	5π/6	ημ270^0=-1	σφ270^0=0
180^0	2π	ημ360^0=0	
270^0	3π/2	συν180^0=-1	
360^0	2π	συν270^0=0	

Γενίκευση της έννοιας των τριγωνομετρικών αριθμών

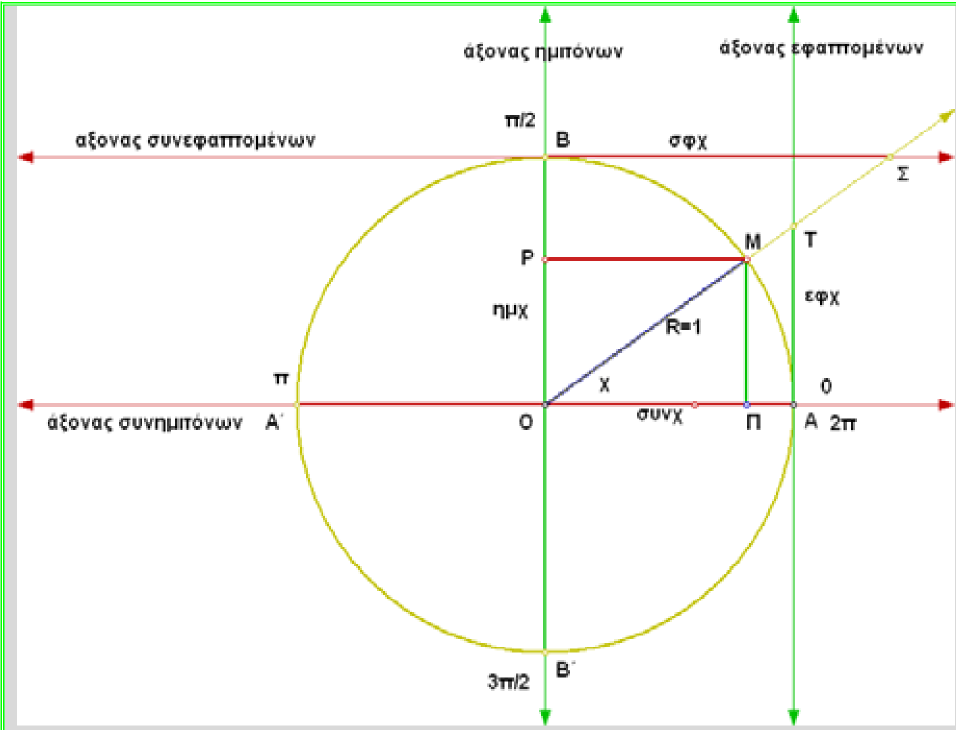


Αν Μ(α,β) είναι ένα σημείο σε σύστημα αξόνων Οx , Οy και ρ η απόστασή του από την αρχή των αξόνων τότε:

$$\eta\mu x = \frac{\beta}{\rho} \quad , \quad \sigma\upsilon\nu x = \frac{\alpha}{\rho}$$

$$\varepsilon\varphi x = \frac{\beta}{\alpha}$$

Ο τριγωνομετρικός κύκλος



Παρατηρήσεις:

- | ημx |≤1 δηλ. −1≤ημx≤1
- | συνx |≤1 δηλ. −1≤συνx≤1
-

Πρόσημο Τριγωνομετ Αριθμών	1^0 Τετ	2^0 Τετ	3^0 Τετ	4^0 Τετ
ημx	+	+	-	-
συνx	+	-	-	+
εφx	+	-	+	-
σφx	+	-	+	-
Μνημονικός Κανόνας	Ο	Η	Ε	Σ

- Η εφαπτομένη δεν ορίζεται όταν x=κπ+π/2 , κ∈Z
- Η συνεφαπτομένη δεν ορίζεται όταν x=κπ , κ∈Z

Μονοτονία :

x	0 π/2	π	3π/2	2π
y=ημx	↑	↓	↓	↑
y=συνx	↓	↓	↑	↑
y=εφx	↑	↑	↑	↑
y=σφx	↓	↓	↓	↓

Αναγωγή στο 1ο Τεταρτημόριο :

- Όταν στο τόξο ενός τριγωνομετρικού αριθμού υπάρχει 2kπ με k∈Z , τότε μπορούμε να το παραλείπουμε γράφοντας το απλό τόξο , χωρίς να αλλάζει ο τριγωνομετρικός αριθμός και ελέγχουμε το πρόσημο από τον τριγωνομετρικό κύκλο.
- Όταν στο τόξο ενός τριγωνομετρικού αριθμού υπάρχει kπ/2 με k=περιττός , τότε μπορούμε να το παραλείπουμε γράφοντας το απλό τόξο , αλλάζοντας τον τριγωνομετρικό αριθμό και ελέγχουμε το πρόσημο από τον τριγωνομετρικό κύκλο.
- Παραδείγματα:

ημ(-χ)=-ημχ	συν(-χ)=συνχ	εφ(-χ)=-εφχ	σφ(-χ)=-σφχ
ημ(π+χ)=-ημχ	συν(π+χ)=-συνχ	εφ(π+χ)=εφχ	σφ(π+χ)=σφχ
ημ(2π+χ)=ημχ	συν(2π+χ)=συνχ	εφ(2π+χ)=εφχ	σφ(2π+χ)=σφχ
ημ(2π-χ)=-ημχ	συν(2π-χ)=συνχ	εφ(2π-χ)=-εφχ	σφ(2π-χ)=-σφχ
ημ(π-χ)=ημχ	συν(π-χ)=-συνχ	εφ(π-χ)=-εφχ	σφ(π-χ)=-σφχ
ημ(π/2-χ)=συνχ	συν(π/2-χ)=ημχ	εφ(π/2-χ)=σφχ	σφ(π/2-χ)=εφχ
ημ(π/2+χ)=συνχ	συν(π/2+χ)=-ημχ	εφ(π/2+χ)=-σφχ	σφ(π/2+χ)=-εφχ
ημ(-3π/2-χ)=συνχ	συν(-3π/2-χ)=ημχ	εφ(-3π/2-χ)=σφχ	σφ(-3π/2-χ)=εφχ

Τύποι :

$\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x=1$	$\varepsilon\phi x=\dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$ $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in Z$	$\sigma\phi x=\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$ $x\neq \lambda\pi, k\in Z$	$\varepsilon\phi x\cdot\sigma\phi x=1$ $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}, k\in Z$ $x\neq \lambda\pi, k\in Z$
$\eta\mu^2 x=\dfrac{\varepsilon\phi^2 x}{1+\varepsilon\phi^2 x}$	$\eta\mu^2 x=\dfrac{1}{1+\sigma\phi^2 x}$	$\sigma\upsilon\nu^2 x=\dfrac{\sigma\phi^2 x}{1+\sigma\phi^2 x}$	$\sigma\upsilon\nu^2 x=\dfrac{1}{1+\sigma\phi^2 x}$

Τριγωνομετρικοί Αριθμοί του αθροίσματος και της διαφοράς δύο τόξων (γωνιών)	
συν(α-β)=συνα·συνβ+ημα·ημβ συν(α+β)=συνα·συνβ-ημα·ημβ	ημ(α-β)=ημα·συνβ-ημβ·συνα ημ(α+β)=ημα·συνβ+ημβ·συνα

$\varepsilon\phi(\alpha+\beta)=\dfrac{\varepsilon\phi\alpha+\varepsilon\phi\beta}{1-\varepsilon\phi\alpha\cdot\varepsilon\phi\beta}$ $\varepsilon\phi(\alpha+\beta)=\dfrac{\varepsilon\phi\alpha+\varepsilon\phi\beta}{1-\varepsilon\phi\alpha\cdot\varepsilon\phi\beta}$ με τους αντίστοιχους περιορισμούς	$\sigma\phi(\alpha+\beta)=\dfrac{\sigma\phi\alpha\cdot\sigma\phi\beta-1}{\sigma\phi\alpha+\sigma\phi\beta}$ $\sigma\phi(\alpha-\beta)=\dfrac{\sigma\phi\alpha\cdot\sigma\phi\beta+1}{\sigma\phi\beta-\sigma\phi\alpha}$ με τους αντίστοιχους περιορισμούς
Από μία γωνία στο μισό της (τύποι του 2·α)	
ημ2α = 2·ημα·συνα	$\varepsilon\phi2\alpha=\dfrac{2\cdot\varepsilon\phi\alpha}{1-\varepsilon\phi^2\alpha}$ $\alpha\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},\ \alpha\neq\dfrac{k\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4},\ k\in Z$
συν2α = συν²α-ημ²α = 2συν²-1 =1-2ημ²α	$\sigma\phi2\alpha=\dfrac{\sigma\phi^2\alpha-1}{2\cdot\sigma\phi\ \alpha}$ $\alpha\neq k\pi,\ \alpha\neq\dfrac{k\pi}{2},\ k\in Z$
$\eta\mu2\alpha=\dfrac{2\cdot\varepsilon\phi\alpha}{1+\varepsilon\phi^2\alpha}$ με τους αντίστοιχους περιορισμούς	$\sigma\upsilon\nu2\alpha=\dfrac{1-\varepsilon\phi^2\alpha}{1+\varepsilon\phi^2\alpha}$ με τους αντίστοιχους περιορισμούς
Από μία γωνία στο διπλάσιό της (τύποι αποτετραγωνισμού)	
$\eta\mu^2\alpha=\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu2\alpha}{2}$	$\sigma\upsilon\nu^2\alpha=\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu2\alpha}{2}$
$\varepsilon\phi^2\alpha=\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu2\alpha}$ με τους αντίστοιχους περιορισμούς	$\sigma\phi^2\alpha=\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu2\alpha}{1-\sigma\upsilon\nu2\alpha}$ με τους αντίστοιχους περιορισμούς

Ασκήσεις (υπολογιστικές) :

1. Αν ημx=-2/3 και x∈(180^0,270^0) να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης: $K=\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{\varepsilon\phi x-\sigma\phi x}$

2. Αν εφχ=-2 και $x \in (\pi/2, \pi)$ να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$K = \frac{\varepsilon\phi x + \sigma\phi x}{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu\chi}$$

3. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών π/8 και π/16.
4. Αν συνα=3/5 και $\alpha \in (3\pi/2\ ,\ 2\pi)$ να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών 2^{α} και α/2.
5. Αν εφα=1/4 και εφβ=1/3 με $\alpha, \beta \in (90^0, 180^0)$ να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων: εφ(α+2β) , ημ(α-β)
6. Αν συν2χ=-1/3 και $x \in (90^0, 180^0)$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K = \frac{\eta\mu(\pi - x) + \sigma\upsilon\nu(\pi + x)}{\eta\mu\left(\frac{3\pi + x}{2}\right) - \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi - x}{2}\right)}$$

Ασκήσεις (αποδεικτικές) :

1. Να αποδείξετε ότι αν ισχύει συν(α+β)=0 τότε ημ(α+2β)=ημα
2. Αν α+β+γ=π με $k \in Z$ δείξτε ότι: εφα+εφβ+εφγ=εφα·εφβ·εφγ . Το αντίστροφο πότε ισχύει;
3. Αν 2α+2β+2γ=π με $k \in Z$ δείξτε ότι: εφα·εφβ+ εφβ·εφγ+ εφγ·εφβ=1 . Το αντίστροφο πότε ισχύει;
4. Αν α+β+γ=π με $k \in Z$ δείξτε ότι: σφα·σφβ+ σφβ·σφγ+ σφγ·σφβ=1 . Το αντίστροφο πότε ισχύει;
5. Αν 2α+2β+2γ=π με $k \in Z$ δείξτε ότι: σφα+σφβ+σφγ=σφα·σφβ·σφγ . Το αντίστροφο πότε ισχύει;
6. Αν χ+y=π/4 να αποδείξετε ότι: (1+εφχ)(1+εφy)=2
7. Δείξτε ότι: ημ(α+β)·ημ(α-β)=$\eta\mu^2\alpha - \eta\mu^2\beta = \sigma\upsilon\nu^2\beta - \sigma\upsilon\nu^2\alpha$
8. Δείξτε ότι: συν(α+β)·συν(α-β)=$\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\beta = \sigma\upsilon\nu^2\beta - \eta\mu^2\alpha$
9. Δείξτε ότι: 2·ημ(α+β)·συν(α-β)=ημ2α+συν2β
10. Δείξτε ότι: συν4χ+4συν2χ+3=$8\sigma\upsilon\nu^4\chi$
11. Δείξτε ότι: συν4θ=$8\sigma\upsilon\nu^4\theta - 8\sigma\upsilon\nu^2\theta + 1$
12. Δείξτε ότι: συν4χ=$1 - 8\eta\mu^2\chi \cdot \sigma\upsilon\nu^2\chi$

13. Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$K=\eta\mu^2\frac{\pi}{8}+\eta\mu^2\frac{3\pi}{8}+\eta\mu^2\frac{5\pi}{8}+\eta\mu^2\frac{7\pi}{8}$$

14. Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$K=\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{8}+\sigma\upsilon\nu^2\frac{3\pi}{8}+\sigma\upsilon\nu^2\frac{5\pi}{8}+\sigma\upsilon\nu^2\frac{7\pi}{8}$$

15. Να αποδείξετε ότι: $\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\theta+\eta\mu 2\theta}{1+\sigma\upsilon\nu 2\theta+\eta\mu 2\theta}=\varepsilon\phi\theta$

16. Να αποδείξετε ότι: $\frac{3-4\sigma\upsilon\nu 2\theta+\sigma\upsilon\nu 4\theta}{3+4\sigma\upsilon\nu 2\theta+\sigma\upsilon\nu 4\theta}=\varepsilon\phi^4\theta$

Τριγωνομετρικές Εξισώσεις :

1. Να λύστε τις παρακάτω εξισώσεις:

<table>
<tr><td>$2\eta\mu\chi+3=0$</td><td>$2\sigma\upsilon\nu\chi-1=0$</td><td>$\sqrt{3}\cdot\varepsilon\phi 2x+1=0$</td><td>$\sigma\phi\frac{2x}{3}+1=0$</td></tr>
<tr><td>$\sqrt{2}\cdot\eta\mu 2x+1=0$</td><td>$2\sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}+\sqrt{3}=0$</td><td>$\varepsilon\phi\chi\cdot\eta\mu\chi+1=\eta\mu\chi+\varepsilon\phi\chi$</td><td>$\varepsilon\phi^2\chi-\sigma\phi^2\chi=0$</td></tr>
<tr><td>$\eta\mu^2 2\chi-\sigma\upsilon\nu^2\chi=0$</td><td>$2\sigma\upsilon\nu^2\chi+\sigma\upsilon\nu\chi-1=0$</td><td>$4\eta\mu^2 2x+2(\sqrt{3}+1)\eta\mu x+\sqrt{3}=0$</td><td>$\sigma\phi^3\chi-\sigma\phi\chi=0$</td></tr>
<tr><td>$2\sigma\upsilon\nu\frac{x+\pi}{3}+1=0$
στο διάστημα
$(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$</td><td>$\eta\mu 2\chi+\sigma\upsilon\nu 3\chi=0$
στο διάστημα $(-\pi,\pi)$</td><td>$\varepsilon\phi x+\sigma\phi\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=0$
στο διάστημα $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$</td><td>$\varepsilon\phi\chi+1=0$
στο διάστημα
$(3\pi,4\pi)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$2\eta\mu^3\chi+\sigma\upsilon\nu^2\chi+2\eta\mu\chi-2=0$</td><td>$(2\sigma\upsilon\nu\chi+1)(\varepsilon\phi^2\chi-3)\sigma\phi\chi=0$</td><td>$\sigma\upsilon\nu 2\chi-\eta\mu\chi-1=0$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\eta\mu 2\chi-2\sigma\upsilon\nu\chi+\eta\mu\chi-1=0$</td><td>$\sigma\upsilon\nu 2\chi+2\sigma\upsilon\nu^2(\chi/2)=0$</td><td>$2-\sigma\upsilon\nu^2 2\chi=4\eta\mu^2\chi$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\sigma\upsilon\nu^2 4\chi-1=2\sigma\upsilon\nu^2 2\chi$</td><td>$\varepsilon\phi^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1-\eta\mu 2x}{1+\eta\mu 2x}$</td><td>$\varepsilon\phi\chi=2\sigma\upsilon\nu(\chi/2)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=2\sqrt{3}$</td><td>$\varepsilon\phi x+\varepsilon\phi\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=-2$</td><td></td></tr>
</table>

Ασκήσεις (στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις) :

1. Να βρείτε την μέγιστη , την ελάχιστη τιμή και την ελάχιστη θετική περίοδο των συναρτήσεων:

f(x)=ημ2χ	f(x)=ημ2χ-1	f(x)=ημ(2χ+π/3)+1	f(x)=3ημ2χ-1
f(x)=-2ημ2χ+1	f(x)=-ημ(χ/2)	f(x)=-συν2χ-3	f(x)=συν(2χ+π/4)
f(x)=2συν3χ+2	f(x)=|συν(χ/2)+1|	f(x)=| εφχ |	f(x)=εφ2χ+1

2. Να κάνετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων:

- f(x)=2ημ(χ/3)+1
- f(x)=-συν[χ+(π/3)]-1
- f(x)=| ημ2χ |-1

aris nikolaidis