ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

36

Παράγωγος - Ολοκλήρωμα

aris

nikolaidis

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2 \cdot e^x$.

A) Να αποδείξετε ότι η νιοστή παράγωγος της συνάρτησης f μπορεί να πάρει τη μορφή $f^{(\nu)}(x)=(x^2+\alpha_\nu x+\beta_\nu)e^x$ όπου α_ν , β_ν είναι συντελεστές εξαρτημένοι από το ν, τους οποίους και να υπολογίσετε.

B) Βρείτε την τιμή του φυσικού αριθμού ν, έτσι ώστε η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f^{(\nu+1)}(x)+f^{(\nu-1)}(x)}{f^{(\nu+1)}(x)-f^{(\nu-1)}(x)}$ να έχει πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $(\varepsilon):2x-4y+5=0$. Για την τιμή αυτή του ν, να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση g.

Γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=α , x=β , όπου α , β οι θέσεις ακροτάτων της f.

<u>Υπόδειξη</u> :

A) $f'(x)=\ldots=(x^2+2x)\cdot e^x$, οπότε: $\alpha_1=2$ και $\beta_1=0$

Αν $f^{(\nu)}(x)=(x^2+\alpha_\nu x+\beta_\nu)e^x$ και $f^{(\nu+1)}(x)=(x^2+\alpha_{\nu+1}x+\beta_{\nu+1})e^x$, έχουμε:

$f^{(\nu+1)}(x)=\left((x^2+\alpha_\nu x+\beta_\nu)e^x\right)'=\ldots=[x^2+(\alpha_\nu+2)x+\beta_\nu+\alpha_\nu]\cdot e^x$ και άρα:

$\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu+2$ και $\beta_{\nu+1}=\beta_\nu+\alpha_\nu$

$\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu+2 \Rightarrow \omega=\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu=2$ δηλ. αριθμητική πρόοδος με $a_1=2$ και ω=2. Έτσι

$\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega \Rightarrow \alpha_\nu=2\nu$

$$\left.\begin{array}{l}\beta_1=\beta_0+2\\ \beta_2=\beta_1+4\\ \beta_3=\beta_2+6\\ \quad\ldots\ldots\\ \beta_\nu=\beta_{\nu-1}+2(\nu-1)\end{array}\right\}\overset{+}{\Longrightarrow}\beta_\nu=\beta_0+\nu(\nu-1)\Rightarrow\beta_\nu=\nu(\nu-1)$$

B) .... $\Rightarrow g(x)=\dfrac{x^2+2\nu x+\nu^2-2\nu+1}{2x+2\nu-1}\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{g(x)}{x}=\dfrac{1}{2}$ και ακόμη

$\lim\limits_{x\to-\infty}[g(x)-\dfrac{1}{2}x]=\dfrac{5}{4}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow\nu=2$ (Όμοια και όταν $x\to+\infty$)

Έτσι: $g(x)=\dfrac{x^2+4x+3}{2x+3}$ | $D_g=(-\infty,-\dfrac{3}{2})\cup(-\dfrac{3}{2},+\infty)$

$g'(x)=\dfrac{2(x^2+3x+3)}{(2x+3)^2}>0$ για κάθε $x\in D_g$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο D_g

Επίσης : $\lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}^-} g(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}^+} g(x)=-\infty$

Πίνακας μεταβολών της συνάρτησης f

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
g'	+		+
g	$-\infty \nearrow +\infty$		$-\infty \nearrow +\infty$

Γ) $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\leq -2$ ή $x\geq 0$, οπότε α= -2 και β=0 με $f(x)=x^2\cdot e^x\geq 0$.

Έτσι: $E=\int_{-2}^{0} x^2e^x dx = \ldots(\text{ολοκλήρωση κατά παράγοντες})\ldots = 2-10e^{-2}$ τ.μ

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\lim\limits_{\nu\to+\infty}\dfrac{|x-1|e^{\nu x}+\alpha(x+1)^2e^{-\nu x}}{e^{\nu x}+e^{-\nu x}}$, $\alpha\in R$

Α) Να υπολογίσετε την τιμή της παραμέτρου α, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο R.

Β) Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη, για την τιμή αυτή του α που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα.

Γ) Να μελετηθεί η f όταν α=1

Δ) Να υπολογίσετε τη συνάρτηση $g(x)=\int_{-1}^{x} f(t)dt$ όταν $x>-1$

Υπόδειξη :

Α) Αν x<0 τότε –x>0 και άρα: $0<e^x<1 \Rightarrow e^{\nu x}\to 0$ και $e^{-x}>1 \Rightarrow e^{-\nu x}\to+\infty$. Άρα

$f(x)=\alpha(x+1)^2$. Αν x=0 τότε: $f(x)=\dfrac{\alpha+1}{2}$. Αν x>0 .... $f(x)=|x-1|$

aris nikolaidis

δηλ. $f(x)=\begin{cases}\alpha(x+1)^2 & , \quad x<0\\ \dfrac{\alpha+1}{2} & , \quad x=0\\ |x-1| & , \quad x>0\end{cases}$

Η f είναι συνεχής προφανώς στα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ και άρα αρκεί να είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$ δηλ. αρκεί $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\Leftrightarrow\ldots\ldots\Leftrightarrow\alpha=1$

Β) $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2 & , \quad x<0\\ 1 & , \quad x=0\\ |x-1| & , \quad x>0\end{cases}$

Η f είναι προφανώς παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(-\infty,0)$, $(0,1)$ και $(1,+\infty)$ και άρα εξετάζουμε την παραγωγισιμότητα στα σημεία $x_1=0$ και $x_2=1$ (με πλευρικές παραγώγους), από όπου προκύπτει ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στα $x_1=0$ και $x_2=1$

Γ) ....

Πίνακας μεταβολών της f

x	$-\infty$ $\quad$ -1		0		1	$+\infty$
f'	—	+		—		+
f''	+	+				
f	$+\infty$ $\quad$ 0		1		0	$+\infty$

Δ) Αν $-1\le x\le 0\Rightarrow g(x)=\int_{-1}^{x}\alpha(t+1)^2dt=\alpha\left[\dfrac{(t+1)^3}{3}\right]_{-1}^{x}=\dfrac{\alpha(x+1)^3}{3}$

Αν $0\le x\le 1\Rightarrow g(x)=\int_{-1}^{0}\alpha(t+1)^2dt+\int_{0}^{x}(-t+1)dt=\alpha\left[\dfrac{(t+1)^3}{3}\right]_{-1}^{0}-\left[\dfrac{(1-t)^2}{2}\right]_{0}^{x}=\dfrac{\alpha}{3}-\dfrac{\alpha(1-x)^2}{2}+\dfrac{1}{2}$

Αν $x\ge 1\Rightarrow g(x)=\int_{-1}^{0}\alpha(t+1)^2dt+\int_{0}^{1}(1-t)dt+\int_{1}^{x}(t-1)dt=$

$=\alpha\left[\dfrac{(t+1)^3}{3}\right]_{-1}^{0}-\left[\dfrac{(1-t)^3}{2}\right]_{0}^{1}-\left[\dfrac{(t-1)^2}{2}\right]_{0}^{x}=\dfrac{\alpha}{3}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{(x-1)^2}{2}$

aris nikolaidis

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha^{g(x)}$, όπου $g(x)=\frac{2|x|}{x^2+1}$, με $\alpha>0\ ,\ \alpha\neq 1$

A) Να γίνει μελέτη της συνάρτησης f

B) Να βρείτε την τιμή του α ώστε να ισχύει: $1\leq f(x)\leq 2$ για κάθε $x\in R$

Γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I=\int_{-1}^{1}\log_\alpha f(x)dx$

<u>Υπόδειξη</u> :

A) Η συνάρτηση g είναι ορισμένη στο R και μάλιστα $g(x)\geq 0$, για κάθε $x\in R$. Άρα η συνάρτηση f ορίζεται σε όλο το R. Η g είναι συνεχής στο R σαν πηλίκο συνεχών και επομένως και η f συνεχής σαν σύνθεση συνεχών. Παρατηρούμε ότι για x=0 έχουμε g(x)=0 , οπότε f(x)=1 , δηλ. η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο A(0 , 1). Ακόμη είναι: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=1$ δηλ. η ευθεία y=1 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f . Παρατηρούμε επί πλέον ότι η f είναι άρτια και επομένως συμμετρική ως προς τον άξονα y'y. Παραγωγίζοντας τώρα την f έχουμε:

$$x\neq 0:\ f'(x)=[e^{g(x)\ln\alpha}]'=\alpha^{g(x)}\ln\alpha\left(\frac{2|x|}{x^2+1}\right)'=\ldots=2\ln\alpha\cdot f(x)\cdot\frac{(1-x^2)\cdot|x|}{(1+x^2)^2\cdot x}$$

Αν $x=0$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\alpha^{-\frac{2x}{x^2+1}}-1}{x}=(\frac{0}{0})\ \text{D.L.H}=\lim_{x\to 0^-}[-2f(x)\frac{(1-x^2)}{(1+x^2)^2}\ln\alpha]=$$

$$=-2\cdot\ln\alpha\cdot\alpha^{\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-2x}{x^2+1}}\cdot\lim_{x\to 0^-}\frac{(1-x^2)}{(1+x^2)^2}=-2\ln\alpha$$

Όμοια προκύπτει $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=2\ln\alpha$ και άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x=0

Μελέτη του προσήμου της f':

Αν $0<\alpha<1 \Rightarrow \ln\alpha<0$ και άρα

$$f'(x)=[e^{g(x)\ln\alpha}]'=2\ln\alpha\cdot f(x)\cdot\frac{(1-x^2)\cdot|x|}{(1+x^2)^2\cdot x}\geq 0\Leftrightarrow\frac{(1-x^2)\cdot|x|}{x}\leq 0\Leftrightarrow\begin{cases}1-x^2\leq 0\ ,\ x>0\\ x^2-1\leq 0\ ,\ x<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1\\ -1\leq x<0\end{cases}$$

Αν $\alpha > 1 = \ \ln\alpha > 0$ και

$$f'(x) = [e^{g(x)\ln\alpha}]' = 2\ln\alpha \cdot f(x) \cdot \frac{(1-x^2)\cdot|x|}{(1+x^2)^2\cdot x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(1-x^2)\cdot|x|}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 1-x^2 \geq 0\ ,\ x>0 \\ x^2-1 \geq 0\ ,\ x<0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 0 < x \leq 1 \\ x \leq -1 \end{Bmatrix}$$

1. Πίνακας μεταβολών όταν 0 <α<1:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
f'	—	+		—	+
f	1 ↘ α	↗	1	↘ α	↗ 1

2. Πίνακας μεταβολών όταν α>1:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
f'	+	—		+	—
f	1 ↘ α	↗	1	↘ α	↗ 1

Β) Είναι $0 \leq \dfrac{2|x|}{x^2+1} \leq 1$ και άρα:

- ✓ Αν 0<α<1 η εκθετική συνάρτηση είναι φθίνουσα οπότε $\alpha^0 \geq \alpha^{g(x)} \geq \alpha^1 \ \Leftrightarrow\ \alpha \leq f(x) \leq 1$
- ✓ Αν α>1 η εκθετική συνάρτηση είναι αύξουσα οπότε $\alpha^0 \leq \alpha^{g(x)} \leq \alpha^1 \ \Leftrightarrow\ 1 \leq f(x) \leq \alpha$

Για να έχουμε $1 \leq f(x) \leq 2$ για κάθε $x \in R$, πρέπει $1 \leq \alpha \leq 2$

Γ) $I = \int_{-1}^{1} \log_\alpha f(x)dx = \int_{-1}^{1} \log_\alpha \alpha^{g(x)}dx = \int_{-1}^{1} g(x)dx = 2\cdot\int_{-1}^{1}\frac{2|x|}{x^2+1}dx = 2\cdot\int_{-1}^{1}\frac{2x}{x^2+1}dx (\gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota};) = \ldots = 2\ln 2$

aris nikolaidis

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+4x-5}-\dfrac{1}{|x+2|-3}$.

A) Να μελετηθεί ως προς την συνέχεια και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

B) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης f(x)=0.

<u>Υπόδειξη</u> :

A) Για το πεδίο ορισμού D_f: Πρέπει $\begin{cases} x^2+4x-5\geq 0 \\ |x+2|\neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow D_f=(-\infty,-5)\cup(1,+\infty)$ Άρα

$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{x^2+4x-5}+\dfrac{1}{x+5}, & x<-5 \\ \sqrt{x^2+4x-5}-\dfrac{1}{x-1}, & x>1 \end{cases}$$

. Προφανώς η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο D_f

με
$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x-5}}-\dfrac{1}{(x+5)^2}, & x<-5 \\ \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x-5}}+\dfrac{1}{(x-1)^2}, & x>1 \end{cases}$$
και έτσι:

- ✓ Αν x<-5 η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα
- ✓ Αν x>1 η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ldots=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ldots=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-5^-} f(x)=\ldots=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\ldots=+\infty$

Έτσι έχουμε τον ακόλουθο πίνακα μεταβολών

x	$-\infty$	-5		1	$+\infty$
f′	—				+
f	$+\infty$ ↘ $-\infty$				$-\infty$ ↗ $+\infty$

B) Αφού η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,-5)$ με τιμές στο $(-\infty,+\infty)$ η εξίσωση f(x)=0 έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(-\infty,-5)$. Για τον ίδιο λόγο η εξίσωση f(x)=0 έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(1,+\infty)$. Άρα η εξίσωση f(x)=0 έχει δύο μόνο ρίζες στο R.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ που ικανοποιεί τις εξής προϋποθέσεις:

- $f(x+y) = f(x)\cdot f(y)$ για κάθε $x, y \in R$
- $f(x) > 1$ για κάθε $x \in R^+$
- η f είναι παραγωγίσιμη στο R

Να αποδείξετε ότι :

A) $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$

B) $f(0) = 1$

Γ) $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in R$

Δ) $f(\nu x) = f^{\nu}(x)$, $x \in R$, $\nu \in N$

E) Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο R και $f'(x) = k\cdot f(x)$, $x \in R$ και k σταθερός πραγματικός αριθμός

ΣΤ) Η f στρέφει τα κοίλα άνω στο R.

<u>Υπόδειξη</u> :

A) Έστω ότι υπάρχει x_0 στο R ώστε: $f(x_0)=0$. Τότε για κάθε $x \in R^+$ έχουμε:
$f(x) = f(x - x_0 + x_0) = f(x - x_0)\cdot f(x_0) = f(x - x_0)\cdot 0 = 0$, άτοπο λόγω της υπόθεσης. Άρα: $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$

B) Για y=0 και $x \in R$ έχουμε: $f(x) = f(x)\cdot f(0) \overset{f(x)\neq 0}{\Longleftrightarrow} f(0) = 1$

Γ) Για y=-x και $x \in R$ έχουμε: $f(0) = f(x)\cdot f(-x) \Leftrightarrow 1 = f(x)\cdot f(-x) \Leftrightarrow f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$

Αφού f(0)=1>0 , αν $x \neq 0 \Rightarrow f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$ και αν $x > 0 \Rightarrow -x < 0 \overset{f(x)>1}{\Rightarrow} f(-x) > 0$ ....

Δ) Με επαγωγή

E) Έστω $x_1, x_2 \in R$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$

Έχουμε :

$$f(x_1) = f(x_1 - x_2 + x_2) = f[x_2 - (x_2 - x_1)] = f(x_2)\cdot f(-x_2 + x_1) = f(x_2)\cdot \frac{1}{f(x_2 - x_1)} < f(x_2)$$

διότι $f(x_2 - x_1) > 1$ και άρα: $0 < \dfrac{1}{f(x_2 - x_1)} < 1$

aris nikolaidis

Η f είναι παραγωγίσιμη στο R και άρα συνεχής σε οποιοδήποτε σημείο $x_0 \in R$ δηλ.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Άρα $f(x_0)\in R^*$. Ακόμη :

$f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0)\cdot f(h)-f(x_0)}{h}=f(x_0)\cdot\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}$. Επειδή όμως

$f'(x_0)\in R \Rightarrow \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)-1}{h}=k\in R$. Άρα $f'(x_0)=k\cdot f(x_0)$, $x\in R$ Επομένως

$f'(x)=k\cdot f(x)$, $x\in R$ με $k\neq 0$, διότι αν $k=0$ τότε $f'(x)=0$ δηλ. η f σταθερή που είναι άτοπο.

ΣΤ) $f''(x)=[f'(x)]'=[kf(x)]'=kf'(x)=k^2f(x)>0$ διότι $k^2>0$ και $f(x)>0$. Άρα η f στρέφει τα κοίλα άνω στο R.

6. Δίνεται ο μιγαδικός $z=x+yi \text{ με } x,y\in R$, τέτοιος ώστε:

$$(\bar{z}+z)\cdot[\frac{1}{4}(\bar{z}^2+z^2)i+\frac{i}{2}(|z|^2+4)]=z-\bar{z}$$

Α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο (C_1) των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο.

Β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης που εκφράζει τον παραπάνω γ.τ τέμνει σε ένα μόνο σημείο τον άξονα x΄x.

Γ) Αν $w=\frac{3}{2}(z+\bar{z})^2+i(z-\bar{z})+2i$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο (C_2) των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο αν $w\in I$.

Δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις (C_1) και (C_2) των παραπάνω γεωμετρικών τόπων.

<u>Υπόδειξη</u> :

Α) Έχουμε:

$$(\bar{z}+z)\cdot[\frac{1}{4}(\bar{z}^2+z^2)i+\frac{i}{2}(|z|^2+4)]=z-\bar{z}\Leftrightarrow i(\bar{z}+z)\cdot[\frac{1}{4}(\bar{z}^2+z^2)+\frac{1}{2}(|z|^2+4)]=z-\bar{z}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow i(\bar{z}+z)\cdot[\frac{1}{4}(\bar{z}^2+z^2)+\frac{1}{4}(2z\bar{z}+8)]=z-\bar{z}\Leftrightarrow\frac{1}{4}i(\bar{z}+z)\cdot[(\bar{z}^2+z^2)+(2z\bar{z}+8)]=z-\bar{z}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{4}i(\bar{z}+z)\cdot[(\bar{z}+z)^2+8]=z-\bar{z}\Leftrightarrow\frac{1}{4}i2x(4x^2+8)=2yi\Leftrightarrow y=x^3+2x$$

Άρα ο ζητούμενος γ.τ είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^3+2x$

Β) Προφανώς f(0)=0 και είναι γνησίως αύξουσα.

Γ) Έχουμε: $w=\frac{3}{2}(z+\bar{z})^2+i(z-\bar{z})+2i \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow w=6x^2-2y+2i$ και για να είναι $w \in I$ πρέπει .... $y=3x^2$. Άρα ο ζητούμενος γ.τ είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=3x^2$.

Δ) $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1$ ή $x \geq 2$. Τα σημεία τομής των δύο γ.τ είναι τα: Ο(0,0) , Α(1,3) και Β(2,12). Οι συναρτήσεις εξάλλου f , g είναι συνεχείς άρα και η διαφορά τους και επομένως ολοκληρώσιμη. Έτσι το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E=\int_0^1 (f(x)-g(x))dx+\int_1^2 (g(x)-f(x))dx=\int_0^1 (x^3-3x^2+2x)dx+\int_1^2 (-x^3+3x^2-2x)dx=...=\frac{1}{2}$$

7. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{\lambda\cdot\sqrt{x-44}}{4}+\frac{k\cdot x|x-4|}{4-x}\ ,\ k,\lambda \in R$. Να υπολογίσετε τις τιμές των παραμέτρων k , λ ώστε: $f'(69)=0$ και $\int_{45}^{85}(k+\lambda)dx=9$

Υπόδειξη :

Προφανώς $D_f=[44,+\infty)$ και άρα $|x-4|=x-4$ για κάθε $x \in D_f$. Έτσι

$f(x)=\frac{\lambda\cdot\sqrt{x-44}}{4}-k\cdot x \Rightarrow f'(x)=\frac{\lambda}{8\cdot\sqrt{x-44}}-k$. Άρα: $f'(69)=0 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \lambda-40k=360$. Εξάλλου είναι: $\int_{45}^{85}(k+\lambda)dx=9 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow 40k+40\lambda=9$ και τελικά $\lambda=9$ και $k=-\frac{351}{40}$

8. Δίνεται η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$ με $f(x)=x\cdot \ln x$, όπου $0<\alpha<\beta$.

Α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha<\frac{1}{e}\cdot\left(\frac{\beta^\beta}{\alpha^\alpha}\right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}}<\beta$

Β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_1^2 f(x)dx$, όπου $[1,2]\subset[\alpha,\beta]$

Υπόδειξη :

Α) Προφανώς η f είναι συνεχής στο [α , β] και παραγωγίσιμη στο (α , β) με $f'(x)=\ln x+1$ και άρα από το Θ.Μ.Τ υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta): f(\beta)-f(\alpha)=f'(\xi)\cdot(\beta-\alpha)$. Όμως $f(\beta)=\ln\beta^\beta$ και $f(\alpha)=\ln\alpha^\alpha$.

Επομένως :

$$f(\beta)-f(\alpha)=f'(\xi)\cdot(\beta-\alpha) \Leftrightarrow \ln\beta^{\beta}-\ln\alpha^{\alpha}=(1+\ln\xi)\cdot(\beta-\alpha) \Leftrightarrow \ln\frac{\beta^{\beta}}{\alpha^{\alpha}}=(1+\ln\xi)\cdot(\beta-\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\beta-\alpha}\cdot\ln\frac{\beta^{\beta}}{\alpha^{\alpha}}=\frac{1}{\beta-\alpha}\cdot(1+\ln\xi)\cdot(\beta-\alpha) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{\beta^{\beta}}{\alpha^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}}=\ln(e\cdot\xi) \Leftrightarrow \left(\frac{\beta^{\beta}}{\alpha^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}}=e\cdot\xi \Leftrightarrow \xi=\frac{1}{e}\cdot\left(\frac{\beta^{\beta}}{\alpha^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}}$$

Όμως $\xi \in (\alpha,\beta) =$ $\alpha < \frac{1}{e}\cdot\left(\frac{\beta^{\beta}}{\alpha^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}} < \beta$

B) $\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 x\cdot\ln x dx = \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2}\right)'\cdot\ln x dx = \ldots = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$

9. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\alpha-1}\frac{3x-1}{x^2-5x+6}dx$, όπου α είναι το $\lim\limits_{x \to 0}\frac{\sqrt{1+\eta\mu x}-1}{x}$

10. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \geq 0$ ισχύουν οι ανισότητες:

A) $x^2 - x^3 < \frac{1}{6}$ B) $\sqrt{1+x} \leq 1+\frac{x}{2}$

11. Να αποδείξετε την ανισότητα: $e^{e}\cdot\pi^{\pi} > e^{2\pi}$

<u>Υπόδειξη</u> : Αρκεί να δείξουμε ότι:

$\ln(e^{e}\cdot\pi^{\pi}) > \ln e^{2\pi} \Leftrightarrow e\cdot\ln e + \pi\cdot\ln\pi > 2\pi\ln e \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow e - \pi > \pi\cdot\ln(e - \ln\pi)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\ln x$, $x>0$ που είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με $f'(x)=\frac{1}{x}$, $x>0$ και άρα σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\xi \in (e,\pi)$: $\ln e - \ln\pi = \frac{1}{\xi}\cdot(e-\pi)$.

Όμως $\left.\begin{matrix} e-\pi<0 \\ \frac{1}{\xi}>\frac{1}{\pi} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{1}{\xi}\cdot(e-\pi) > \frac{1}{\pi}\cdot(e-\pi)$, οπότε $\ln e - \ln\pi < \frac{1}{\pi}\cdot(e-\pi)$ δηλ. $\pi\cdot(\ln e - \ln\pi) < e - \pi$

aris nikolaidis

12. Έστω η συνάρτηση $f:R \to R$ ώστε να ισχύει:

$|f(x)-f(y)|+\sigma\upsilon\nu(x-y)\leq 1 \ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x,y\in R$. Να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή.

<u>Υπόδειξη</u> : Αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και $f'(x)=0 \ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in R$. Έστω $x_0\in R$. Τότε $|f(x)-f(x_0)|+\sigma\upsilon\nu(x-x_0)\leq 1 \Leftrightarrow |f(x)-f(x_0)|\leq 1-\sigma\upsilon\nu(x-x_0) \ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in R$, οπότε

αν $x\neq x_0$ έχουμε: $\left|\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|\leq\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu(x-x_0)}{|x-x_0|}=\dfrac{2\cdot\eta\mu^2\dfrac{x-x_0}{2}}{|x-x_0|}\ldots\ldots\to 0$. Άρα η f είναι

παραγωγίσιμη στο τυχαίο σημείο x_0 και $f'(x_0)=0 \ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x_0\in R$

13. Έστω $f:R\to R$ μία συνάρτηση για την οποία υπάρχει η δεύτερη παράγωγος και επί πλέον ισχύουν: α) $f+f''=0$ και β) $f(0)=f'(0)=0$.

Δείξτε ότι η f είναι η μηδενική συνάρτηση.

<u>Υπόδειξη</u> : Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=[f(x)]^2+[f'(x)]^2$, $x\in R$ και έχουμε:

$h'(x)=\ldots=2\cdot f'(x)\cdot[f(x)+f''(x)]=0 \quad (\lambda\acute{o}\gamma\omega\ \upsilon\pi\acute{o}\theta\varepsilon\sigma\eta\varsigma)$. Άρα υπάρχει

$c\in R: h(x)=c \ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in R$. Όμως $h(0)=[f(0)]^2+[f'(0)]^2=0+0=0$, άρα $c=0$.

Επομένως $[f(x)]^2+[f'(x)]^2=0\Leftrightarrow[f(x)]^2=[f'(x)]^2=0\Rightarrow f(x)=0$

14. Έστω $f:R\to R$ μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη με την ιδιότητα η f΄ να είναι κυρτή. Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση f δεν έχει σημεία καμπής, τότε η f΄ είναι «1-1»

<u>Υπόδειξη</u> : Έστω ότι η f΄ δεν είναι συνάρτηση «1-1». Τότε θα υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί x_1 , x_2 με $x_1< x_2$ ώστε f΄(x_1)= f΄(x_2). Αφού η f΄ είναι κυρτή η f΄΄ θα είναι γνησίως αύξουσα και από το θεώρημα Rolle για την f΄ στο διάστημα [x_1 , x_2] προκύπτει ότι υπάρχει ξ του διαστήματος (x_1 , x_2) ώστε f΄΄(ξ)=0. Επειδή η f΄΄ είναι γνησίως αύξουσα αλλάζει πρόσημο εκατέροθεν του ξ, οπότε το ξ είναι σημείο καμπής της f, που είναι άτοπο. Άρα η f είναι «1-1».

15. Να βρείτε για ποιες τιμές του α η εξίσωση: $\sqrt{x-2}+\sqrt{8-2x}=\alpha$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα.

<u>Υπόδειξη</u> : Προφανώς η εξίσωση έχει έννοια μόνο αν $2\leq x\leq 4$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{8-2x} \ \sigma\tau o\ \delta\iota\acute{\alpha}\sigma\tau\eta\mu\alpha\ [2,4]$ που είναι συνεχής, και παραγωγίσιμη στο (2 , 4)

με $f'(x)=\ldots=\dfrac{\sqrt{8-2x}-2\sqrt{x-2}}{2\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{8-2x}}$. Έχουμε

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{8-2x} - 2\sqrt{x-2} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{8-2x} \geq 2\sqrt{x-2} \Leftrightarrow 8-2x \geq 4x-8 \Leftrightarrow x \leq \frac{8}{3}$ και λόγω του πεδίου ορισμού $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{8}{3} \leq x < 4$

Έτσι έχουμε τον πίνακα:

x	2		8/3		4
f'		+	0	—	
f	τ.μ	↘	τ.ε	↗	τ.μ

Άρα στο σημείο $x_0 = \frac{8}{3}$ έχουμε ολικό ελάχιστο $f(\frac{8}{3}) = 3\sqrt{\frac{2}{3}}$ Επίσης για $x_1 = 2$ έχουμε τοπικό μέγιστο $f(2) = 2$ και για $x_2 = 4$ έχουμε τοπικό μέγιστο $f(4) = \sqrt{2}$ Το σύνολο τιμών επομένως της f είναι $f([2,4]) = \left[3\sqrt{\frac{2}{3}}\ ,\ 2\right]$. Η εξίσωση λοιπόν έχει λύση μόνο αν

$\alpha \in f([2,4]) \Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{2}{3}} \leq \alpha \leq 2$

16. Θεώρημα Darboux :

Έστω $f:[\alpha,\beta] \to R$ μια συνάρτηση παραγωγίσιμη.

I. Αν η f παίρνει την ελάχιστη τιμή στο σημείο α, να αποδείξετε ότι $f'(\alpha) \geq 0$, ενώ αν παίρνει την την ελάχιστη τιμή στο β, να αποδείξετε ότι $f'(\beta) \leq 0$.

II. Αν ισχύει $f'(\alpha) < 0 < f'(\beta)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta):\ f'(\xi) = 0$

III. Αν ισχύει $f'(\alpha) < \kappa < f'(\beta)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta):\ f'(x_0) = c$

<u>Υπόδειξη</u> :

I. Αν η f παίρνει την ελάχιστη τιμή στο α, τότε ισχύει $f(\alpha) \leq f(x)$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$ οπότε $\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \geq 0$ για κάθε $x \in (\alpha,\beta) \Rightarrow \lim\limits_{x \to \alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} \geq 0$ και άρα $f'(\alpha) \geq 0$. Όμοια αν η f παίρνει την ελάχιστη τιμή στο β.

II. Η συνάρτηση f ως συνεχής στο [α , β] παρουσιάζει ελάχιστο σε κάποιο σημείο $\xi \in [\alpha,\beta]$. Αφού $f'(\alpha) < 0 < f'(\beta)$ σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα το $\xi \in (\alpha,\beta)$ και από το θεώρημα Fermat $f'(\xi) = 0$

III. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\kappa x$, $x\in[\alpha,\beta]$ που είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=f'(x)-\kappa$, οπότε $g'(\alpha)=f'(\alpha)-\kappa<0$ και $g'(\beta)=f'(\beta)-\kappa>0$. Άρα από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta):\ g'(x_0)=0 \Leftrightarrow f'(x_0)=c$

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u> : Από το θεώρημα Daboux προκύπτει ότι αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο Δ, τότε για την f΄ ισχύει το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής.

17. Έστω $f:R\to R$ μια συνάρτηση παραγωγίσιμη και η οποία στρέφει τα κοίλα άνω. Να αποδείξετε ότι:

$$f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]<\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)\ ,\ \text{για κάθε}\ x_1,x_2\in R\ \ \text{με}\ 0<\lambda<1$$.

<u>Υπόδειξη</u> : Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$(1-\lambda+\lambda)\cdot f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]-\lambda f(x_1)-(1-\lambda)f(x_2)<0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (1-\lambda)\cdot\{f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]-f(x_2)\}+\lambda\cdot[f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)-f(x_1)]<0$$

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ για την f στα διαστήματα $[x_1,\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]$ και $[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,x_2]$ από όπου προκύπτει ότι υπάρχουν $\xi_1\in(x_1,\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)$ και $\xi_2\in(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,x_2)$ ώστε:

$$f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]-f(x_1)=f'(\xi_1)\cdot[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2-x_1]\quad \text{και}$$
$$f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]-f(x_2)=f'(\xi_2)\cdot[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2-x_2]$$

Άρα: $$\lambda\cdot[f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]-f(x_1)]=f'(\xi_1)\cdot\lambda\cdot(1-\lambda)(x_2-x_1)]\quad \text{και}$$
$$(1-\lambda)\cdot[f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]-f(x_2)]=f'(\xi_2)\cdot\lambda\cdot(1-\lambda)(x_1-x_2)]$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε .... και επειδή η f΄ είναι γνησίως αύξουσα ......

18. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ=[0 , 2] με f(1)=f(2) και οι εφαπτόμενες της γραφικής της παράστασης στα σημεία $x_1=1$ και $x_2=2$ είναι παράλληλες, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} f(2x) & ,\ x\in[0,1] \\ f(2x-1) & ,\ x\in(1,2] \end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ.

<u>Υπόδειξη</u> :

Στα διαστήματα [0 , 1) και (1 , 2] η g είναι παραγωγίσιμη σαν σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για την παραγωγισιμότητα στο $x_0=1$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(2x)-f(2)}{x-1}\overset{2x=t}{=}\lim_{t\to 2}\frac{f(t)-f(2)}{\frac{t}{2}-1}=\ldots=2f'(2)$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(2x-1)-f(2)}{x-1}\overset{2x-1=t}{=}\lim_{t\to 1}\frac{f(t)-f(2)}{\frac{t+1}{2}-1}=\ldots=2f'(1)$$

Από υπόθεση έχουμε $f'(1)=f'(2)$ και άρα η g είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$, επομένως και στο Δ.

19. Έστω η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με f΄΄ συνεχή στο διάστημα Δ και $f'(0)=2f(0)=2$. Αν επί πλέον ισχύει $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}=f'(x)$, να βρείτε τον τύπο της f και το πλήθος των εφαπτομένων της γραφικής της παράστασης που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

<u>Υπόδειξη</u> : Εφαρμόζοντας το θεώρημα De L' Hospital έχουμε:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)\cdot(0+1)-0+f'(x-h)\cdot(0-1)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f''(x+h)+f''(x-h)}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(x)=f''(x)\ ,\ \text{για κάθε } x\in\Delta$$

Άρα $f'(x)=ce^x \Rightarrow f(x)=ce^x+k$. Αφού $f'(2)=0= c=2$ και αφού $f(0)=1= k=-1$. Επομένως $f(x)=2e^x-1$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο τυχαίο σημείο $A(x_0\ ,\ f(x_0))$ είναι: $y-(2e^{x_0}-1)=2e^{x_0}(x-x_0)$

και για x=y=0 προκύπτει: $2x_0e^{x_0}-2e^{x_0}+1=0$

Έτσι αρκεί να βρούμε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης : $2x_0e^{x_0}-2e^{x_0}+1=0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $g(x)=2xe^x-2e^x+1=0$ με $g(x)=2xe^x$. Είναι

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ και $\lim_{x\to-\infty} g(x)=1>0$ ....

20. Δίνεται η συνάρτηση f με $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\Delta$, $f(2)=1$ και $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$

I) Δείξτε ότι: $e^{f(x)}+f(x)>0$ για κάθε $x\in R$

II) Αν $g(x)=\frac{f(x)}{e^{f(x)}+f(x)}$, $x\in R$ να μελετηθεί η g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Υπόδειξη :

I) Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο R και $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$ θα είναι f(x)>0 για κάθε $x\in R$,

οπότε: $e^{f(x)}+f(x)>0$ για κάθε $x\in R$

II) Η g είναι παραγωγίσιμη στο R με $g'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot e^{f(x)}(1-f(x))}{(e^{f(x)}+f(x))^2}$, $x\in R$. Έτσι:

$g'(x)>0\Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x<2$ ....

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln(x-1)}{\ln x}$.

I) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

II) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία

III) Να αποδείξετε ότι: $(\alpha-1)^{\ln\beta}<(\beta-1)^{\ln\alpha}$ για κάθε $1<\alpha<\beta$

Υπόδειξη :

I) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x-1)}{\ln x}=(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty$, άρα η ευθεία x=1 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f .

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(\ln(x-1))'}{(\ln x)'}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x}}=\ldots=1$, άρα η ευθεία y=1 είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f .

II) Για κάθε x>1 έχουμε: $f'(x)=\ldots=\dfrac{(x-1)\cdot[\ln x-\ln(x-1)]-\ln x}{x(x-1)\ln^2 x}>0$ διότι:

για $x>x-1\Leftrightarrow \ln x>\ln(x-1)$ και $x>1$, $\ln x>0$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta=(1,+\infty)$

III) $\alpha<\beta\Rightarrow f(\alpha)<f(\beta)\Rightarrow \dfrac{\ln(\alpha-1)}{\ln\alpha}<\dfrac{\ln(\beta-1)}{\ln\beta}\Rightarrow \ln\beta\cdot\ln(\alpha-1)<\ln\alpha\cdot\ln(\beta-1)\Rightarrow$

$\Rightarrow \ln(\alpha-1)^{\ln\beta}<\ln(\beta-1)^{\ln\alpha}\Rightarrow \ln(\alpha-1)^{\ln\beta}<\ln(\beta-1)^{\ln\alpha}$

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-e\cdot x\ ,\ x\in R$, και δύο κάθετες ευθείες (ε_1) , (ε_2) που διέρχονται από την αρχή των αξόνων έτσι ώστε η (ε_1) να εφάπτεται της C_f. Αν Ε(α) είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραμμές C_f , (ε_1) , (ε_2) και την μεταβλητή ευθεία x=α , α>0 να βρείτε πότε ο ρυθμός μεταβολής του Ε(α) γίνεται ο μικρότερος δυνατός.

Υπόδειξη :

$f(x)=e^x-e\cdot x \Rightarrow f'(x)=e^x-e$

Αν $(x_0, f(x_0))$ είναι το σημείο επαφής της (ε_1) με την C_f τότε η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι: $y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0)$ και αφού περνά από το (0 , 0) θα επαληθεύεται από τις συν/νες του και επομένως ….. $x_0=1$. Άρα η (ε_1) θα είναι y=0 δηλ. ο άξονας x΄x και η (ε_2) ο άξονας y΄y.

$f'(x)=e^x-e>0\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow x>1$ δηλ. στο σημείο (1 , 0) παρουσιάζει ελάχιστο και επομένως $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in R$.

$$E(\alpha)=\int_0^\alpha |f(x)|dx=\int_0^\alpha (e^x-ex)dx \Rightarrow E'(\alpha)=e^\alpha-e\cdot\alpha$$

$E''(\alpha)=e^\alpha-e\geq 0\Leftrightarrow \alpha\geq 1$. Άρα όταν α=1 ελαχιστοποιείται ο ρυθμός $E'(\alpha)$.

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=5\cdot\ln x$ και η ευθεία (ε): $y=x\cdot\ln 5$.

I) Να αποδείξετε ότι έχουν δύο κοινά σημεία με τετμημένες $x_1=\alpha<5$ και $x_2=5$.

II) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ευθεία $x=x_0$, η οποία διαιρεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f και την (ε) σε λόγο 2006.

Υπόδειξη :

I) Για να βρούμε τα κοινά σημεία λύνουμε την εξίσωση: $f(x)=y\Leftrightarrow 5\ln x=x\ln 5\Leftrightarrow \frac{\ln x}{x}=\frac{\ln 5}{5}$.

Η εξίσωση αυτή έχει την προφανή ρίζα x=5.

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $h(x)=\frac{\ln x}{\ln 5}-\frac{\ln 5}{5}$, $x>5 \Rightarrow h'(x)=\ldots=\frac{1-\ln x}{x^2}\geq 0\Leftrightarrow x\leq e$

Στο διάστημα $[e,+\infty)$ η h είναι γνησίως αύξουσα και άρα έχουμε μοναδική ρίζα $x_2=5$.

Στο διάστημα $[1,e]$ εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano και … έχουμε μοναδική ρίζα $x_1=\alpha<5$

II) Αν x=t με $t\in[\alpha,5]$, θεωρούμε τη συνάρτηση

$F(x)=E_1-2006E_2=\int_\alpha^t(5\ln x-\ln 5\cdot x)dx-2006\int_t^5(5\ln x-\ln 5\cdot x)dx$ και από το θεώρημα Bolzano για την F - αφού είναι συνεχής και $F(\alpha)F(5)=-2006\cdot[\int_\alpha^5(5\ln x-x\ln 5)dx]^2<0$ - έχουμε ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,5)$: $h(x_0)=0\Leftrightarrow E_1=2006\cdot E_2$

aris nikolaidis

24. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:R\to R \quad με \quad f(x)=\int_0^x e^{t+f(t)}dt$.

I) Να βρείτε τον τύπο της f.

II) Να βρεθεί ο $\alpha\in(0,1)$, ώστε η συνάρτηση $g(x)=\alpha^x$ να εφάπτεται στην f.

<u>Υπόδειξη</u> :

I) Η f είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=-e^{x+f(x)}\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{e^{f(x)}}=-e^x\Leftrightarrow -f'(x)\cdot e^{-f(x)}=e^x\Leftrightarrow[\,e^{-f(x)}\,]'=(e^x)'\Leftrightarrow\ e^{-f(x)}=e^x+c$$

και για x=0 έχουμε …… c=0. Άρα : $f(x)=-x$

II) Οι C_f , C_g εφάπτονται αν ισχύει: $\begin{Bmatrix} f(x_0)=g(x_0)\\ \text{και}\\ f'(x_0)=g'(x_0)\end{Bmatrix}\Leftrightarrow\begin{Bmatrix}\alpha^{x_0}=-x_0\\ \text{και}\\ \alpha^{x_0}\ln\alpha=-1\end{Bmatrix}\Rightarrow\ldots\Rightarrow\alpha=e^{-\frac{1}{e}}$

25. Έστω η συνάρτηση $f:R\to R \quad με \quad f(x+y)=f(x)\cdot f(y) \quad για \ κάθε \ x\,,y\in R$.

I) Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{x}=\alpha\in R$, να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R.

II) Αν επιπλέον η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $x_0 = 0$ σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $\dfrac{\pi}{4}$, να βρείτε τον τύπο της f.

<u>Υπόδειξη</u> :

I) Για το τυχαίο σημείο $x_0\in R$, έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)\cdot f(h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0)\cdot[\,f(h)-1\,]}{h}=\alpha\cdot f(x_0)\in R$$

. Άρα η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x)=\alpha\cdot f(x) \quad για \ κάθε \ x\in R$

II) Προφανώς $f'(0)=1\Leftrightarrow\alpha\cdot f(0)=1$

Όμως : $\lim\limits_{x\to 0}[\,f(x)-1\,]=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{[\,f(x)-1\,]}{x}\cdot x\right)=\alpha\cdot 0=0$. Επομένως $f(0)-1=0\Leftrightarrow f(0)=1\Leftrightarrow\alpha=1$.

Για κάθε $x\in R$ έχουμε :

$$f'(x)=f(x)\Leftrightarrow f'(x)-f(x)=0\Leftrightarrow\ e^{-x}\cdot f'(x)-e^{-x}\cdot f(x)=0\Leftrightarrow(\ f(x)\cdot e^{-x}\ )'=0\Leftrightarrow f(x)\cdot e^{-x}=c\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x)=c\cdot e^x$$

Από f(0)=1 προκύπτει c=1.

aris nikolaidis

26. Αν ισχύει: $f(x)-g(y)=(x-y)^2\cdot\int_{\alpha}^{\beta}g(t)dt \quad \text{για κάθε } x,y\in R$, όπου η g είναι συνεχής συνάρτηση στο R, να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R και να βρεθεί ο τύπος της.

<u>Υπόδειξη</u> :

Για x=y προκύπτει: $f(x)=g(x)\ ,\ \text{για κάθε } x\in R$

Για $y=x_0$ έχουμε: $f(x)-f(x_0)=(x-x_0)^2\cdot\int_{\alpha}^{\beta}g(t)dt$ και άρα:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\left[(x-x_0)^2\cdot\int_{\alpha}^{\beta}g(t)dt\right]=0\ ,\ \text{άρα } f'(x)=0 \text{ για κάθε } x\in R.$$

Άρα: $f(x)=c\ ,\ x\in R$

Η αρχική υπόθεση για $x\neq y$ γίνεται:

$$f(x)-f(y)=(x-y)^2\cdot\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx \Leftrightarrow (x-y)^2\cdot\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=0 \Leftrightarrow \int_{\alpha}^{\beta}c\cdot dx=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c\cdot(\beta-\alpha)=0 \overset{\alpha\neq\beta}{\Leftrightarrow} c=o$$

Άρα $f(x)=0\ ,\ \text{για κάθε } x\in R$

27. Έστω f , g συναρτήσεις δύο φορές παραγωγίσιμες στο R με $f(0)=g(0) \quad \text{και} \quad f(1)=g(1)+1$. Αν επί πλέον υποθέσουμε ότι: $f'(x+y)-g'(x+y)=f'(y)-g'(y) \quad \text{για κάθε } x,y\in R$, να αποδείξετε ότι:

I) $f(x)=g(x)+x \quad \text{για κάθε } x\in R$

II) Οι εφαπτόμενες των f ,g στο σημείο x=α τέμνουν τον άξονα y΄y στο ίδιο σημείο.

<u>Υπόδειξη</u> :

I) Θεωρούμε το y σταθερό και παραγωγίζουμε την δεδομένη σχέση ως προς x. Έτσι έχουμε:

$f''(x+y)\cdot(x+y)'-g''(x+y)\cdot(x+y)'=0 \Leftrightarrow f''(x+y)=g''(x+y) \quad \text{για κάθε } x,y\in R$ και

θέτοντας όπου x και y το $\frac{x}{2}$, έχουμε:

$f''(x)=g''(x)= f'(x)=g'(x)+c= f'(x)=(g(x)+c\cdot x)'= f(x)=g(x)+c\cdot x+c_1$. Για x=0 προκύπτει ότι $c_1=0$ και για x=1 έχουμε c=1 δηλαδή: $f(x)=g(x)+x\ ,\ x\in R$

II) Οι εφαπτόμενες των f , g αντίστοιχα είναι:

$$\left\{\begin{matrix} y-f(\alpha)=f'(\alpha)\cdot(x-\alpha) \\ y-g(\alpha)=g'(\alpha)\cdot(x-\alpha) \end{matrix}\right\}$$ και για x=0 το σημείο τομής τους με τον άξονα y'y είναι:

$$\left\{\begin{matrix} y=f(\alpha)-\alpha\cdot f'(\alpha) \\ y=g(\alpha)-\alpha\cdot g'(\alpha)=f(\alpha)-\alpha-\alpha\cdot(f'(\alpha)-1)=f(\alpha)-\alpha\cdot f'(\alpha) \end{matrix}\right\}$$

28. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα [1 , e] με f(e)=0, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,e)$ ώστε $f(\xi)=f'(\xi)\cdot \ln\xi^{-\xi}$.

<u>Υπόδειξη</u> :

Αρκεί να δείξουμε ότι ο ξ με 1<ξ<e είναι ρίζα της εξίσωσης:

$$f(x)=f'(x)\cdot \ln x^{-x}\Leftrightarrow f(x)+x\cdot f'(x)\cdot \ln x=0\Leftrightarrow f(x)\cdot\frac{1}{x}+f'(x)\cdot\ln x=0\Leftrightarrow f(x)\cdot(\ln x)'+f'(x)\cdot \ln x=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow[\,f(x)\cdot(\ln x)\,]'=0$$

Εφαρμόζουμε λοιπόν το θεώρημα Rolle για την συνάρτηση $g(x)=f(x)\cdot \ln x\,|\,[1,e]$........

29. Αν $F(x)=\int_1^x f(t)dt\ ,\ x\in R^*$ και $f(t)=\int_{4t}^{2t}\frac{\eta\mu u}{u}du\ ,\ t\in R^*$, να βρείτε τα:

I) $F''(\frac{\pi}{4})$ και $F''(\pi)$

II) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot F''(x)+\eta\mu 2x\cdot(\sigma\upsilon\nu x-1)}{x\cdot\sigma\upsilon\nu x}$

<u>Υπόδειξη</u> :

Η συνάρτηση $y=\frac{\eta\mu u}{u}$ είναι συνεχής στο R^*, και άρα η συνάρτηση $g(x)=\int_0^t\frac{\eta\mu u}{u}du$ είναι παραγωγίσιμη στο R^* με $g'(t)=\frac{\eta\mu t}{t}\ ,\ t\in R^*$

$$f(t)=\int_{4t}^{1}\frac{\eta\mu u}{u}du+\int_1^{2t}\frac{\eta\mu u}{u}du=\int_1^{2t}\frac{\eta\mu u}{u}du-\int_1^{4t}\frac{\eta\mu u}{u}du=g(2t)-g(4t)\ ,\ t\in R^*\Rightarrow$$

$$f'(t)=2\cdot g'(2t)-4\cdot g'4t)=\frac{\eta\mu 2t-\eta\mu 4t}{t}=\frac{\eta\mu 2t(1-2\sigma\upsilon\nu 2t)}{t}\ ,\ t\in R^*$$

$$F''(x)=f'(x)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} F''(\frac{\pi}{4})=\ldots=\frac{4}{\pi} \\ F''(\pi)=\ldots=0 \end{array}\right\}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot F''(x)+\eta\mu 2x\cdot(\sigma\upsilon\nu x+1)}{x\cdot\sigma\upsilon\nu x}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 2x\cdot(1-2\sigma\upsilon\nu 2x)+\eta\mu 2x\cdot(\sigma\upsilon\nu x+1)}{x\cdot\sigma\upsilon\nu x}=$$

$$=2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 2x}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-2\sigma\upsilon\nu 2x+\sigma\upsilon\nu x+1}{\sigma\upsilon\nu x}=\ldots=2$$

30. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\int_0^{\sqrt{x}}\sqrt{t^2+1}\cdot\eta\mu t\,dt \quad ,x\geq 0$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο Ο(0 , 0)

Υπόδειξη :

Θέτουμε $\sqrt{x}=u$ και για x>0 είναι:

$$f'(x)=(\int_0^u\sqrt{t^2+1}\cdot\eta\mu t\,dt)'\cdot u'(x)=\sqrt{u^2+1}\cdot\eta\mu u\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x+1}\cdot\eta\mu\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x+1}}{2}\right)=\frac{1}{2}$$, επειδή

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu\sqrt{x}\cdot(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})'}=\ldots=1$$

Άρα η ζητούμενη εφαπτομένη θα είναι …. $y=\frac{1}{2}x$

31. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και ισχύει $f(x)=\int_0^{f(x)}(e^{t^2}+1)dt \quad \text{για κάθε } x\in R$, να αποδείξετε ότι $f(x)=0 \quad \text{για κάθε } x\in R$

Υπόδειξη :

$$f(x)=\int_0^{f(x)}(e^{t^2}+1)dt \Rightarrow f'(x)=(e^{f^2(x)}+1)\cdot f'(x)\Rightarrow f'(x)\cdot e^{f^2(x)}=0\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow f(x)=c$$

$$f(x)=\int_0^{f(x)}(e^{t^2}+1)dt \Rightarrow f(0)=\int_0^{f(0)}(e^{t^2}+1)dt\Rightarrow c=\int_0^{c}(e^{t^2}+1)dt$$

Αν c>0 τότε: Από το θεώρημα Μ .Τ για την f στο διάστημα [0 , c] υπάρχει

$$\xi \in (0, c): \int_0^c (e^{t^2}+1)dt = c(e^{\xi^2}+1) \Rightarrow c = c(e^{\xi^2}+1) \Rightarrow e^{\xi^2}+1=1 \Rightarrow e^{\xi^2}=0 \text{ , άτοπο}$$

Αν c<0 τότε: Από το θεώρημα Μ .Τ για την f στο διάστημα [c , 0] καταλήγουμε σε άτοπο.

Άρα c=0.

32. I) Να αποδείξετε ότι: $1 + x \cdot e^x - e^x > 0 \ \text{ για κάθε } \ x \in R^*$.

II) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση: $f(x) = \int_0^1 e^{xt}dt \ , \ x \in R$

<u>Υπόδειξη</u> :

I) Η συνάρτηση $g(x) = x \cdot e^x - e^x + 1$ είναι παραγωγίσιμη στο R με $g'(x) = x \cdot e^x$.

$g'(x) \ge 0 \Leftrightarrow x \cdot e^x \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 0$. Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$. Επομένως g(x) > g(0)=0 για κάθε x>0 και g(x) > g(0)=0 για κάθε x<0

II) Αν $x \ne 0$ θέτουμε: $x \cdot t = u \Rightarrow x \cdot dt = du \Leftrightarrow dt = \frac{1}{x} \cdot du$ και έτσι

$$f(x) = \int_0^1 e^{x \cdot t}dt = \int_0^x e^u \cdot \frac{1}{x}du = \frac{1}{x} \cdot [e^u]_0^x = \frac{e^x - 1}{x} \quad , \quad f(0) = \int_0^1 1dt = [t]_0^1 = 1$$

Επομένως: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & , \ x \ne 0 \\ 1 & , \ x = 0 \end{cases}$

Η f είναι συνεχής στο R^* σαν πηλίκο συνεχών και

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1)'}{(x)'} = 1 = f(0)$$ δηλ. η f είναι συνεχής στο R.

Για $x \ne 0 \Rightarrow f'(x) = \ldots = \frac{x \cdot e^x - e^x + 1}{x^2} > 0$ και επειδή η f είναι συνεχής στο 0 η f θα είναι γνησίως αύξουσα στο R.

33. Να υπολογίσετε το όριο: $A=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\int_{\sigma\upsilon\nu x}^{\eta\mu x}\sqrt{1-t^2}\,dt}{4x-\pi}$.

<u>Υπόδειξη</u> :

Προφανώς $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(4x-\pi)=0$ και $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\int_{\sigma\upsilon\nu x}^{\eta\mu x}\sqrt{1-t^2}\,dt=0$ και έτσι:

$$A=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\int_{\sigma\upsilon\nu x}^{\eta\mu x}\sqrt{1-t^2}\,dt}{4x-\pi}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\left(\int_{\sigma\upsilon\nu x}^{\eta\mu x}\sqrt{1-t^2}\,dt\right)'}{(4x-\pi)'}$$

$$g(x)=\int_{\sigma\upsilon\nu x}^{\eta\mu x}\sqrt{1-t^2}\,dt=\int_{\sigma\upsilon\nu x}^{\alpha}\sqrt{1-t^2}\,dt+\int_{\alpha}^{\eta\mu x}\sqrt{1-t^2}\,dt=\int_{\alpha}^{\eta\mu x}\sqrt{1-t^2}\,dt-\int_{\alpha}^{\sigma\upsilon\gamma x}\sqrt{1-t^2}\,dt\Rightarrow$$

$$g'(x)=\left(\int_{\alpha}^{\eta\mu x}\sqrt{1-t^2}\,dt\right)'-\left(\int_{\alpha}^{\sigma\upsilon\gamma x}\sqrt{1-t^2}\,dt\right)'=\sqrt{1-\eta\mu^2x}\cdot\sigma\upsilon\nu x-\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu^2x}\cdot(-\eta\mu x)=$$

$$=|\sigma\upsilon\nu x|\cdot\sigma\upsilon\nu x+|\eta\mu x|\cdot\eta\mu x=\sigma\upsilon\nu^2x+\eta\mu^2x=1$$

Άρα $A=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\int_{\sigma\upsilon\nu x}^{\eta\mu x}\sqrt{1-t^2}\,dt}{4x-\pi}=\dfrac{1}{4}$

34. Να υπολογίσετε το όριο: $A=\lim\limits_{x\to1}\int_{1}^{x^2}\dfrac{\ln t}{x^3-1}dt$

<u>Υπόδειξη</u> :

Επειδή μεταβλητή ολοκλήρωσης είναι το t έχουμε:

$$A=\lim_{x\to1}\int_{1}^{x^2}\frac{\ln t}{x^3-1}dt=\lim_{x\to1}\frac{\int_{1}^{x^2}\ln t\,dt}{x^3-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\int_{1}^{x^2}\ln t\,dt\right)'}{(x^3-1)'}=\lim_{x\to1}\frac{2x\cdot\ln x^2}{3x^2}=\lim_{x\to1}\frac{2\cdot\ln x^2}{3x}=0$$

aris nikolaidis

35. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει ότι: $f(x)=\int_0^x\left(\int_0^u f(t)dt\right)du$, για κάθε $x\in R$, να αποδείξετε ότι: $f(x)=0$, για κάθε $x\in R$

<u>Υπόδειξη</u> :

Θέτουμε $g(u)=\int_0^u f(t)dt$ και άρα $f(x)=\int_0^x g(u)du$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=g(x)=\int_0^x f(t)dt$ και $f''(x)=f(x)$

$f''(x)=f(x)= f''(x)-f(x)=0= f''(x)+f'(x)-f'(x)-f(x)=0=$

$\Rightarrow (f'(x)+f(x))'-(f'(x)+f(x))=0 \Rightarrow (f'(x)+f(x))'=(f'(x)+f(x)) \Rightarrow f'(x)+f(x)=c\cdot e^x$

Όμως $f(0)=f'(x)=0$ και άρα c=0. Έτσι

$f'(x)+f(x)=0 \Rightarrow f'(x)\cdot e^x+f(x)\cdot e^x=0\cdot e^x \Rightarrow (f(x)\cdot e^x)'=0$, για κάθε $x\in R$ και άρα $f(x)\cdot e^x$

Αφού f(0)=0 θα είναι και c=0 , οπότε και f(x)=0.

36. Δίνεται η συνάρτηση $y=f(x)$ για την οποία ισχύει: $x=t^3+3t$, $4y=3t^4$, $t\in R$ Να μελετηθεί η f ως προς τα ακρότατα και να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία αυτά.

<u>Υπόδειξη</u> :

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=3t^3\cdot\frac{1}{3t^2+3}=\frac{t^3}{t^2+1}\geq 0 \Leftrightarrow t\geq 0$$

. Άρα η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο όταν t=0 δηλ. στο σημείο Μ(0,0). Η εφαπτομένη στο σημείο αυτό είναι: $y-0=f'(0)\cdot(x-0)\Leftrightarrow y=0$, δηλ. ο άξονας x'x.

aris nikolaidis