Ανισότητες μιας μεταβλητής

Για την απόδειξη μιας ανισότητας της μορφής f(χ) $\geq$ g(χ) για κάθε χ$\in$(α,β) μπορούμε να δουλέψουμε με δύο τρόπους.

1^{ος} τρόπος : Θεωρούμε την συνάρτηση F(χ)= f(χ) - g(χ) στο (α,β) , βρίσκουμε την F΄(χ) και το πρόσημό της στο (α,β). Έτσι έχουμε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της F (όταν δεν μπορούμε να βρούμε εύκολα το πρόσημο της F΄ υπολογίζουμε τις παραγώγους μεγαλύτερης τάξης μέχρι να βρούμε παράγωγο με γνωστό πρόσημο)

2^{ος} τρόπος : Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ για την συνάρτηση F(χ)= f(χ)-(χ)|Α σε κατάλληλο διάστημα. Για την επιλογή του διαστήματος: Αν α$\in$Α ή β$\in$Α τότε επιλέγουμε σαν κατάλληλο διάστημα το [α,χ] ή [χ,β] με χ$\in$(α,β). Αν α,β$\notin$Α τότε επιλέγουμε σαν κατάλληλο διάστημα το [ρ_i , χ] και [χ , ρ_i] όπου ρ_i ρίζα της F΄(χ)=0

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Δείξτε ότι: $\frac{x}{x+1} < \ln(1+x)$ για κάθε $x > 0$

Υπόδειξη:

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ για την f(χ)= $\frac{x}{x+1} - \ln(1+x)$ στο διάστημα [0,χ] και άρα υπάρχει ξ$\in$(0,χ):f΄(ξ)= $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ … $\Leftrightarrow$

$\frac{x\xi}{(\xi+1)^2} = f(x)$. Όμως $\frac{x\xi}{(\xi+1)^2} > 0$ ⋯

ή

Αν f(χ)= $\ln(1+x)$ - $\frac{x}{x+1}$|(-1,0) ➔ … ➔ f΄(χ)= $\frac{x}{(x+1)^2} > 0$, $x > 0$ ⋯

2. Να αποδειχθεί ότι ι) $e^x \geq 1+x$ για κάθε $x \in R$ και ιι) $\ln x \leq x-1$ για κάθε $x>0$ Υπόδειξη: ι) Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ στο διάστημα [0,χ] ,χ>0 και [χ,0] , χ<0 …. ιι) Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ στο διάστημα [χ,1] ,χ∈(0,1) και [1,x] , χ>1… ή ο δεύτερος τρόπος όπως προηγούμενα …..
3. Να αποδειχθεί ότι: $\sigma\upsilon\nu\chi < 1 - \frac{\chi^2}{2} + \frac{\chi^4}{24}$, για κάθε χ>0
4. Να αποδειχθεί ότι: $\eta\mu\chi \geq \chi - \frac{\chi^3}{6}$, για κάθε χ≥0
5. Αν η συνάρτηση $f\|R_+$ είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της , παραγωγίσιμη στο R_+^* , f(0)=0 , και η $f'\|R_+$ γνησίως αύξουσα , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi(\chi)=\frac{f(x)}{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο R_+^* Υπόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι φ΄(χ)>0 για κάθε χ>0 … δηλ. f(χ)/χ < f΄(χ) για κάθε χ>0 Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ στο [0,χ] για την f οπότε …
6. Αν η συνάρτηση f|[α,β] είναι δύο φορές παραγωγίσιμη , f΄΄(χ)<0 για κάθε χ∈[α,β] και f(α)=f(β)=0 , δείξτε ότι f(χ)>0 για κάθε χ∈(α,β) Υπόδειξη: Από το Θ. Rolle …. έχουμε f΄(ξ)=0 , ξ∈(α,β) Εξάλλου f΄΄(χ)<0 , χ∈[α,β] ➔ f΄γνησίως φθίνουσα … και άρα α<ξ<β ➔ f΄(χ)>f΄(ξ)=0 ξ<χ<β ➔ f΄(χ)<f΄(ξ)=0 ……
7. Αν για τις συναρτήσεις f , φ ισχύουν: • f , φ παραγωγίσιμες στο R • υπάρχει $\chi_0 \in R$: $f(\chi_0)=\varphi(\chi_0)$ • f΄(χ)>φ΄(χ) για κάθε χ∈R να αποδείξετε ότι f(χ)>φ(χ) για κάθε $\chi>\chi_0$ και f(χ)<φ(χ) για κάθε $\chi<\chi_0$ Υπόδειξη: Για την συνάρτηση F(χ)=f(χ)-φ(χ) έχουμε $F(\chi_0)=0$ και F΄(χ)>0 για κάθε χ∈R δηλ. γνησίως αύξουσα …
8. Αποδείξτε ότι: χ.ημχ+συνχ>1 για κάθε χ∈(0 , π/2]
9. Αποδείξτε ότι: $1-\frac{1}{x} \leq \ln x$, για κάθε $\chi > 0$

10. Αποδείξτε ότι: $\chi - \frac{\chi^2}{2} \le \ln(1+\chi) \le \chi \quad , \text{για κάθε } \chi > 0$
11. Αποδείξτε ότι: $e^x.(1+x)>1$ για κάθε χ>0
12. Αποδείξτε ότι: $1+\frac{x}{2\sqrt{1+x}} < \sqrt{1+x} < 1+\frac{x}{2}$, για κάθε χ∈(-1,0)
13. Αποδείξτε ότι: $e.\ln x \le x$, για κάθε χ>0

Ανισότητες δύο μεταβλητών

Για την απόδειξη μιας ανισότητας της μορφής $f(\alpha,\beta) \geq g(\alpha,\beta)$ με $\alpha,\beta \in A$ μπορούμε να δουλέψουμε με δύο τρόπους.

1ος τρόπος : Με το Θ.Μ.Τ.

2ος τρόπος : Θεωρούμε το α σταθερό και δείχνουμε ότι $f(\alpha,\chi) \geq g(\alpha,\chi)$ ….

Θεωρούμε το β σταθερό και δείχνουμε ότι $f(\chi,\beta) \geq g(\chi,\beta)$ ….

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Δείξτε ότι: $\frac{\varepsilon\varphi\alpha}{\varepsilon\varphi\beta} < \frac{\beta}{\alpha}$, για κάθε α , β με $0<\alpha<\beta<\pi/2$

   Υπόδειξη: Θ.Μ.Τ για την συνάρτηση $f(\chi)=\chi.\varepsilon\varphi\chi$ ….

2. Δείξτε ότι: $(\alpha+\beta)(\ln\beta-\ln\alpha) > (\beta-\alpha)/2$, $0<\alpha<\beta$

   Υπόδειξη: Θ.Μ.Τ για την συνάρτηση $f(\chi)=\ln\chi$ ….

3. Δείξτε ότι: $(\beta-\alpha)\varepsilon\varphi\alpha < \ln\sigma\upsilon\nu\alpha-\ln\sigma\upsilon\nu\beta < (\beta-\alpha)\varepsilon\varphi\beta$ για κάθε $\alpha,\beta\in(0,\pi/2)$

   Υπόδειξη: Θ.Μ.Τ για την συνάρτηση $f(\chi)=\ln\sigma\upsilon\nu\chi$ στο $[\alpha,\beta]$ ….

4. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f|[\alpha,\beta]$ που είναι παραγωγίσιμη στο(α,β) και έστω ότι $|f'(\chi)|<\kappa$ για κάθε $\chi\in(\alpha,\beta)$, $\kappa \geq 0$. Να δείξετε ότι $|f(\chi_2)-f(\chi_1)|<\kappa.|\chi_2-\chi_1|$ για κάθε χ_1 , $\chi_2\in(\alpha,\beta)$

5. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f|[0,+\infty)$ με $f(0)=\alpha$, $\alpha\in R$, παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και έστω ότι για κάθε $\chi\in(0,+\infty)$ και $\kappa\in R$ ισχύει $f'(\chi) \leq \kappa$. Να δείξετε ότι $f(\chi) \leq \alpha+\kappa\chi$

   Υπόδειξη: Θ.Μ.Τ για την συνάρτηση $f(\chi)$ στο $[0,\chi]$ ….