# ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

## Άσκηση 1

Έστω $f:[0,1] \to IR$ παραγωγίσιμη με $f'(0) < 0 < f'(1)$. Δείξτε ότι η f έχει ελάχιστο στο διάστημα (0,1 ).

**Υπόδειξη :**

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο [0,1 ] θα είναι και συνεχής σ' αυτό . Σύμφωνα με γνωστό θεώρημα θα έχει ελάχιστο στο διάστημα [0,1 ]. Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι δεν μπορεί να είναι το 0 ή το 1. Έστω ότι το 0 είναι ελάχιστο. Τότε $f(0) \le f(x)$ , για κάθε $x \in [0,1]$ και άρα

$\dfrac{f(x)-f(0)}{x} \ge 0$ για κάθε $x \in [0,1]$. Έτσι $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} \ge 0$ που είναι άτοπο λόγω της $f'(0) < 0$ .

Όμοια απορρίπτουμε και την περίπτωση να είναι το 1 ελάχιστο.

## Άσκηση 2

Έστω $f: IR \to IR$ παραγωγίσιμη. Να αποδείξετε ότι: $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$. Να εξετάσετε αν ισχύει το αντίστροφο.

**Υπόδειξη :**

$\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = \dfrac{1}{2}\cdot\left[\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} + \dfrac{f(x)-f(x-h)}{h}\right] = \dfrac{1}{2}\cdot\left[\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} + \dfrac{f(x-h)-f(x)}{-h}\right]$ και επειδή η f είναι παραγωγίσιμη έχουμε: $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = \dfrac{1}{2}[f'(x)+f'(x)] = f'(x)$

Το αντίστροφο δεν ισχύει. Πράγματι αν θεωρήσουμε την συνάρτηση $f(x) = |x|$ τότε γνωρίζουμε ότι αυτή δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Όμως $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{|h|-|h|}{2h} = 0$

## Άσκηση 3

Δώστε ένα παράδειγμα μιας συνάρτησης f που να ορίζεται στο διάστημα [0 ,1], να είναι παραγωγίσιμη στο (0,1 )για την οποία δεν ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος μέσης τιμής.

**Υπόδειξη :**

Πρέπει η συνάρτηση να είναι ασυνεχής σε ένα τουλάχιστο από τα σημεία 0 , 1 (δεν είναι ικανό αυτό).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1 \ , & 0 < x \le 1 \\ 0 \ , & x = 0 \end{cases}$. Τότε $\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0} = 1$

Αν ίσχυε το θεώρημα μέσης τιμής θα έπρεπε να υπάρχει $\xi \in (0,1)$ ώστε $f'(\xi) = 1$.

Όμως για κάθε $x \in (0,1)$ έχουμε $f'(x) = 0$.

## Άσκηση 4

Έστω $f:[\alpha,\beta]\to IR$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο [α , β], ώστε $f'(x)\le 1$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ και $f(\beta)-f(\alpha)=\beta-\alpha$. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=f(\alpha)+x-\alpha \;\;,\;\; \text{για κάθε } x\in[\alpha,\beta]$

**Υπόδειξη :**

Αν x=α ή x=β, τότε προφανώς ισχύει η ισότητα.

Έστω $x\in(\alpha,\beta)$. Αφού η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο [α, β] μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα [α , x] και [x , β]. Έτσι θα υπάρχει

$\xi_1\in(\alpha,x):\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\xi_1)\le 1 \;\Rightarrow\; f(x)-f(\alpha)\le x-\alpha \Rightarrow f(x)-x\le f(\alpha)-\alpha$ και

$\xi_2\in(x,\beta):\dfrac{f(\beta)-f(x)}{\beta-x}=f'(\xi_2)\le 1 \;\Rightarrow\; f(\beta)-f(x)\le \beta-x \Rightarrow f(\beta)-\beta\le f(x)-x$

Από την υπόθεση προκύπτει: $f(\beta)=f(\alpha)+\beta-\alpha \Leftrightarrow f(\beta)-\beta=f(\alpha)-\alpha$ και επομένως

$f(x)=f(\alpha)+x-\alpha \;\;,\;\; \text{για κάθε } x\in[\alpha,\beta]$

## Άσκηση 5

Να αποδείξετε με τη βοήθεια του θεωρήματος μέσης τιμής ότι: $\dfrac{1}{8}<\sqrt{51}-7<\dfrac{1}{7}$

**Υπόδειξη :**

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:[49,51]\to IR$ με $f(x)=\sqrt{x}$ για την οποία ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος της μέσης τιμής και άρα υπάρχει $\xi\in(49,51):\dfrac{\sqrt{51}-\sqrt{49}}{51-49}=\dfrac{1}{2\sqrt{\xi}}$

Όμως $\xi\in(49,51)\Rightarrow 7<\sqrt{\xi}<8\Rightarrow \dfrac{1}{8}<\dfrac{1}{\sqrt{\xi}}<\dfrac{1}{7}\Rightarrow \dfrac{1}{8}<\sqrt{51}-7<\dfrac{1}{7}$

## Άσκηση 6

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση :

$f(x)=(x-\alpha)^2+(x-\beta)^2+x^2 \quad \text{με } x\in IR \text{ και } \alpha,\beta\in IR$

## Άσκηση 7

Δείξτε ότι αν $x\,,y>0$ και $x+y=1$ τότε : $x\cdot\log x+y\cdot\log y\ge -\log 2$

**Υπόδειξη :**

Είναι y=1-x . Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:(0,1)\to IR$ με $f(x)=x\cdot\log x+(1-x)\cdot\log(1-x)$ και έχουμε : $f\,'(x)=\log x-\log(1-x)=\log\left(\dfrac{x}{1-x}\right)\geq 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x\geq\dfrac{1}{2}$. Άρα στο σημείο $x_0=\dfrac{1}{2}$ έχει ολικό ελάχιστο, δηλαδή

$$f(\tfrac{1}{2})\leq f(x)\Leftrightarrow -\log 2\leq x\cdot\log x+(1-x)\cdot\log(1-x)\overset{y=1-x}{\Rightarrow} -\log 2\leq x\cdot\log x+y\cdot\log y$$

## Άσκηση 8

Να αποδείξετε ότι : $e^{\pi}>\pi^{e}$

**Υπόδειξη :**

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x}{x^e}$ , $x>0$. Τότε $f\,'(x)=\dfrac{e^x\cdot x^e-e\cdot x^{e-1}\cdot e^x}{x^{2e}}=\dfrac{e^x\cdot x^{e-1}(x-e)}{x^{2e}}$

Έτσι στο διάστημα $(e\,,-\propto)=$ $f'(x)>0$ δηλ. γνησίως αύξουσα με $f\,'(e)=0$ . Επομένως

$$e<x<\pi\Rightarrow f(e)<f(x)<f(\pi)\ \Rightarrow 1<\frac{e^{\pi}}{\pi^{e}}\ \Rightarrow\ e^{\pi}>\pi^{e}.$$

## Άσκηση 9

Να αποδείξετε ότι : $(\sigma\upsilon\nu\theta)^p\leq\sigma\upsilon\nu(p\theta)$ $\mu\varepsilon\ \ 0\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}$ $\kappa\alpha\iota\ \ 0<p<1$

**Υπόδειξη :**

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(\theta)=\dfrac{(\sigma\upsilon\nu\theta)^p}{\sigma\upsilon\nu(p\theta)}$ $\mu\varepsilon\ \ 0\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}$ $\kappa\alpha\iota\ \ 0<p<1$. Έχουμε

$$f\,'(x)=\ldots=\frac{p(\sigma\upsilon\nu\theta)^{p-1}}{\sigma\upsilon\nu^2(p\theta)}\cdot\eta\mu[(p-1)\theta]<0\ldots\ldots$$

## Άσκηση 10

Αν $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots,\alpha_\nu>0$ $\kappa\alpha\iota$ $\alpha_1^{\,x}+\alpha_2^{\,x}+\ldots+\alpha_\nu^{\,x}\geq\nu$ $\gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\mathrm{IR}$, να αποδειχθεί ότι: $\prod_{k=1}^{\nu}\alpha_k=1$.

**Υπόδειξη :**

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\alpha_1^{\,x}+\alpha_2^{\,x}+\ldots+\alpha_\nu^{\,x}$ , $x\in\mathrm{IR}$ και έχουμε
$f(x)\geq\nu=f(0)$ $\gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in\mathrm{IR}$ δηλ. το 0 είναι ελάχιστο και επειδή η f είναι παραγωγίσιμη με

$f\,'(x)=\alpha_1^{\,x}\cdot\log\alpha_1+\alpha_2^{\,x}\cdot\log\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu^{\,x}\cdot\log\alpha_\nu$ , $x\in\mathrm{IR}$ σύμφωνα με το θεώρημα Fermat πρέπει

$$f\,'(0)=0\Leftrightarrow\log\alpha_1+\log\alpha_2+\ldots+\log\alpha_\nu=0\Leftrightarrow\log\prod_{k=1}^{\nu}\alpha_k=0\Leftrightarrow\prod_{k=1}^{\nu}\alpha_k=1.$$