ΑΣΚΗΣΗ 21

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-\alpha)^{\mu}\cdot(x-\beta)^{\nu}$ με $\mu,\nu\in IN^{*}$. Να αποδείξετε ότι :

1. Ισχύει το θεώρημα Rolle στο διάστημα [α , β].
2. Για τον αριθμό x_0 του θεωρήματος Rolle ισχύει : $\dfrac{x_0-\alpha}{\beta-x_0}=\dfrac{\mu}{\nu}$

Υπόδειξη :

i. Η φ είναι ορισμένη συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο [α,β]. Επειδή $\phi(\alpha)=\phi(\beta)=0$, από το θεώρημα του Rolle, υπάρχει αριθμός $x_0\in(\alpha,\beta)$, τέτοιος ώστε $\phi'(x_0)=0$

ii. Έχουμε:

$$\phi'(x)=\mu(x-\alpha)^{\mu-1}(x-\beta)^{\nu}+\nu(x-\alpha)^{\mu}(x-\beta)^{\nu-1}=(x-\alpha)^{\mu-1}(x-\beta)^{\nu-1}\left[\mu(x-\beta)+\nu(x-\alpha)\right]$$

Επομένως: $\phi'(x_0)=(x_0-\alpha)^{\mu-1}(x_0-\beta)^{\nu-1}\left[\mu(x_0-\beta)+\nu(x_0-\alpha)\right]=0\quad(1)$

Επειδή $x_0-\alpha\neq 0$ και $x_0-\beta\neq 0$ η (1) δίνει: $\mu(x_0-\beta)+\nu(x_0-\alpha)=0\Leftrightarrow\dfrac{x_0-\alpha}{\beta-x_0}=\dfrac{\mu}{\nu}$

ΑΣΚΗΣΗ 22

2. Δίνονται τα πολυώνυμα $f(x),g(x)$ και $h(x)$. Είναι $g(x)=h(x)f'(x)-h'(x)f(x)\quad(1)$

Αν $g(x)\neq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, να δειχθεί ότι μεταξύ δύο πραγματικών ριζών ρ_1,ρ_2 του $f(x)$ περιέχεται μια τουλάχιστον ρίζα του $h(x)$.

Υπόδειξη :

Υποθέτουμε ότι ρ_1,ρ_2 είναι δύο ρίζες του $f(x)$ και ότι το $h(x)$ δεν έχει ρίζα στο διάστημα (ρ_1,ρ_2). Είναι: $g(\rho_1)=h(\rho_1)f'(\rho_1)\neq 0\Leftrightarrow h(\rho_1)\neq 0$ Όμοια δείχνουμε ότι $h(\rho_2)\neq 0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση F, με $F(x)=\dfrac{f(x)}{h(x)}$, ορισμένη στο διάστημα $[\rho_1,\rho_2]$. Η F είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$ και παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2) με $F(\rho_1)=F(\rho_2)=0$.

Άρα για τη συνάρτηση F ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[\rho_1,\rho_2]$. οπότε θα υπάρχει αριθμός $x_0, x_0\in(\rho_1,\rho_2)$ τέτοιος ώστε $F'(x_0)=0\quad(2)$.

Είναι όμως: $F'(x_0)=\dfrac{f'(x_0)h(x_0)-f(x_0)h'(x_0)}{h^2(x_0)}=\dfrac{g(x_0)}{h^2(x_0)}\neq 0\quad(3)$

Από (2) , (3) έχουμε άτοπο. Επομένως το h(x) έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (ρ_1,ρ_2).

ΑΣΚΗΣΗ 23

3. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, που είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)=f(\beta)=0 \quad (1)$.

1. Να δειχθεί ότι για τη συνάρτηση g, με τύπο $g(x)=\dfrac{f(x)}{x-x_0}$ και $x_0\notin[\alpha,\beta]$ υπάρχει αριθμός $\xi\in(\alpha,\beta)$, τέτοιος ώστε $g'(\xi)=0$.
2. Να δειχθεί ότι η εφαπτομένη (ε) του διαγράμματος της f στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ περνά από το σημείο $N(x_0,0)$.

Υπόδειξη :

1. Η συνάρτηση g είναι ορισμένη στο διάστημα [α,β] και συνεχής στο [α,β]. Είναι:

$g'(x)=\dfrac{f'(x)(x-x_0)-f(x)}{(x-x_0)^2} \quad (2)$ Άρα η g είναι παραγωγίσιμη στο (α,β). Είναι ακόμα:

$g(\alpha)=\dfrac{f(\alpha)}{\alpha-x_0}\overset{(1)}{=}0,\quad g(\beta)=\dfrac{f(\beta)}{\beta-x_0}\overset{(1)}{=}0$ δηλαδή $g(\alpha)=g(\beta)$.

Έτσι σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle, υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi)=0 \quad (3)$.

2 Η (3) είναι ισοδύναμη με την :

$$\frac{f'(\xi)(\xi-x_0)-f(\xi)}{(\xi-x_0)^2}=0\Leftrightarrow f'(\xi)(\xi-x_0)-f(\xi)=0\Leftrightarrow f'(\xi)=\frac{f(\xi)}{\xi-x_0} \quad (4)$$

Η εφαπτομένη (ε) στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ του διαγράμματος της f έχει εξίσωση :

$y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi)\overset{(4)}{\Leftrightarrow} y-f(\xi)=\dfrac{f(\xi)}{\xi-x_0}(x-\xi) \quad (5)$ Οι συντεταγμένες $(x_0,0)$ του σημείου N επαληθεύουν την (5). Πράγματι είναι: $0-f(\xi)=\dfrac{f(\xi)}{\xi-x_0}(x_0-\xi)\Leftrightarrow -f(\xi)=-f(\xi)$

Άρα η (ε) περνά από το σημείο $N(x_0,0)$.

ΑΣΚΗΣΗ 24

4. Να δειχθεί η ανισότητα: $\dfrac{1}{3}\prec \ln 1,5\prec\dfrac{1}{2}$

Υπόδειξη :

Η συνάρτηση f με $f(x)=\ln x$ στο διάστημα $[1,\ 1{,}5]$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη. Σύμφωνα με το θεώρημα της μέσης τιμής, θα υπάρχει $\xi\in(1,\ 1{,}5)$ τέτοιος που:

$f'(\xi)=\dfrac{f(1{,}5)-f(1)}{1{,}5-1}\Rightarrow\dfrac{1}{\xi}=\dfrac{\ln 1{,}5-\ln 1}{0{,}5}\Rightarrow\dfrac{1}{\xi}=\dfrac{\ln 1{,}5}{0{,}5} \quad (1)$ Αλλά:

$1\prec\xi\prec 1{,}5=\dfrac{3}{2}\Rightarrow 1\succ\dfrac{1}{\xi}\succ\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow\dfrac{2}{3}\prec\dfrac{1}{\xi}\prec 1 \quad (2)$

Από (1) και (2) προκύπτει ότι : $\dfrac{2}{3}\prec\dfrac{\ln 1{,}5}{0{,}5}\prec 1\Rightarrow\dfrac{2}{3}0{,}5\prec\ln 1{,}5\prec 0{,}5\Rightarrow\dfrac{1}{3}\prec\ln 1{,}5\prec\dfrac{1}{2}$

ΑΣΚΗΣΗ 25

5. Δίνεται μια συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει :
$\left|f'(x)\right| \le \left|x_1 - x_2\right|,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}\ \left(x_1 \ne x_2\right)$.

i. Να δειχθεί ότι $\left|f(x_1) - f(x_2)\right| \le \left|x_1 - x_2\right|^2,\ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

ii. Να δειχθεί ότι η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

Υπόδειξη :

i. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, επομένως και σε ένα διάστημά της μορφής $[x_1, x_2]$, $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}\ (x_1 \prec x_2)$. Στο διάστημα αυτό η f είναι και συνεχής ως παραγωγίσιμη. Σύμφωνα με το Θ. Μ. Τ., υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Rightarrow \left|\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\right| = \left|f'(\xi)\right| \le \left|x_1 - x_2\right| \Rightarrow \left|f(x_1) - f(x_2)\right| \le \left|x_1 - x_2\right|^2$$

ii. Είναι: $\left|\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\right| \le \left|x_1 - x_2\right| \Leftrightarrow -\left|x_1 - x_2\right| \le \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \le \left|x_1 - x_2\right| \quad (1)$

Με όρια και στα δύο μέλη όταν $x_1 \to x_2$ έχουμε:

$$0 \le \lim_{x_1 \to x_2} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \le 0 \Rightarrow \lim_{x_1 \to x_2} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = 0 \Rightarrow f'(x_2) = 0,\ \forall x_2 \in \mathbb{R}$$

Άρα είναι: $f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = c$

ΑΣΚΗΣΗ 26

6. Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{2}{5}\right)^x$.

i. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία.

ii. Να λυθεί η ανίσωση $\left(2^{x-1} + 3^{x-1}\right)5^{1-3x} \prec \left(2^{1-3x} + 3^{1-3x}\right)5^{x-1} \quad (1)$

Υπόδειξη :

i. Είναι $f'(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x \ln\frac{3}{5}+\left(\frac{2}{5}\right)^x \ln\frac{2}{5}$. Επειδή $\ln\frac{3}{5}\prec 0$, $\ln\frac{2}{5}\prec 0$, $\left(\frac{3}{5}\right)^x\succ 0$, $\left(\frac{2}{5}\right)^x\succ 0$, θα είναι και $f'(x)\prec 0, \forall x\in\mathbb{R}$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Η (1) γράφεται ισοδύναμα:

$$\frac{2^{x-1}+3^{x-1}}{5^{x-1}}\prec\frac{2^{1-3x}+3^{1-3x}}{5^{1-3x}}\Leftrightarrow\left(\frac{2}{5}\right)^{x-1}+\left(\frac{3}{5}\right)^{x-1}\prec\left(\frac{2}{5}\right)^{1-3x}+\left(\frac{3}{5}\right)^{1-3x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x-1)\prec f(1-3x)$$

Η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και ισχύει $f(x-1)\prec f(1-3x)$. Άρα θα είναι και

$$x-1\succ 1-3x\Leftrightarrow x\succ\frac{1}{2}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 27

7. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με:

$f''(x)+f'(x)g(x)-f(x)=0$ (1) και με $f(\alpha)=f(\beta)=0$

Να δειχθεί ότι $f(x)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Υπόδειξη :

Η f είναι συνεχής στο [α,β] ως παραγωγίσιμη, επομένως υπάρχουν (θεώρημα ελάχιστης-μέγιστης τιμής) $\xi_1,\xi_2\in[\alpha,\beta]$ τέτοια που $f(\xi_1)\le f(x)\le f(\xi_2)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Έτσι λοιπόν η παραγωγίσιμη συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο στο ξ_1 και μέγιστο στο ξ_2.

Άρα (από θεώρημα Fermat) θα είναι :

$f'(\xi_1)=0, f''(\xi_1)\ge 0$ και $f'(\xi_2)=0, f''(\xi_2)\le 0$.

Η (1) για $x=\xi_1$ δίνει $f''(\xi_1)-f(\xi_1)=0\Leftrightarrow f(\xi_1)=f''(\xi_1)\ge 0$

Η (1) για $x=\xi_2$ δίνει $f''(\xi_2)-f(\xi_2)=0\Leftrightarrow f(\xi_2)=f''(\xi_2)\le 0$

Άρα $0\le f(\xi_1)\le f(x)\le f(\xi_2)\le 0\Rightarrow f(\xi_1)=f(\xi_2)=0\Rightarrow f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ΑΣΚΗΣΗ 28

8. Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

i. Να δειχθεί ότι η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο.

ii. Να συγκριθούν οι αριθμοί π^e και e^π.

Υπόδειξη :

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}_+^*$. Είναι $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ και $f''(x)=\dfrac{3-2\ln x}{x^3}$. Ρίζα της εξίσωσης $f'(x)=0$ είναι η $x_0=e$ (διότι $1-\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=1 \Leftrightarrow x_0=e$).

Έχουμε: $f''(e)=-\dfrac{3-2\ln e}{e^3}=-\dfrac{3-2}{e^3}=\dfrac{-3+2}{e^3}=-\dfrac{1}{e^3}\prec 0$

Άρα για $x=e$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο $f(e)=\dfrac{\ln e}{e}=\dfrac{1}{e}$

Έχουμε ακόμα ότι: $f'(x)\prec 0, \forall x\in(e,+\infty)\Rightarrow f\downarrow$ στο $(e,+\infty)$

$f'(x)\succ 0, \forall x\in(0,e)\Rightarrow f\uparrow$ στο $(0,e)$

Συμπέρασμα: Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x=e$ και αυτό είναι το $\dfrac{1}{e}$.

Άρα είναι: $f(e)\succ f(\pi)\Leftrightarrow \dfrac{\ln e}{e}\succ\dfrac{\ln\pi}{\pi}\Leftrightarrow \pi\ln e\succ e\ln\pi \Leftrightarrow \ln e^{\pi}\succ \ln\pi^{e}\Leftrightarrow e^{\pi}\succ\pi^{e}$

ΑΣΚΗΣΗ 29

1. Δίνεται η συνάρτηση f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, τέτοια που:

$\left[f(x)+x\right]\left[f(y)+y\right]=f(x+y)+x+y\ (1),\ \forall x,y\in\mathbb{R}$

Αν $f(1)=\pi-1\ (2)$ και η f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$, να δειχθεί ότι:

i. $f(0)=1$

ii. $f(x)\neq -x,\ \forall x\in\mathbb{R}$

iii. $\left[f'(x)+1\right]\left[f(y)+y\right]=\left[f'(y)+1\right]\left[f(x)+x\right],\ \forall x,y\in\mathbb{R}$

Υπόδειξη :

i. Η (1) για $x=0, y=1$, δίνει:

$f(0)\left[f(1)+1\right]=f(1)+1\overset{(2)}{\Rightarrow} f(0)\left[\pi-1+1\right]=\pi-1+1\Rightarrow \pi f(0)=\pi\Rightarrow f(0)=1$

ii. Υποθέτουμε για ένα $x_0\in\mathbb{R}$ είναι $f(x_0)=-x_0$.

Η (1) δίνει για $y=-x_0$ και $f(x_0)=-x_0$:

$(-x_0+x_0)\left[f(-x_0)-x_0\right]=f(x_0-x_0)+x_0-x_0\Rightarrow 0=f(0)\Rightarrow 0=1$ που είναι αδύνατο.

iii. Η (1) παραγωγίζοντας με μεταβλητή το x, δίνει:

$\left[f(x)+x\right]'\left[f(y)+y\right]=f'(x+y)(x+y)'+x'\Rightarrow\left[f'(x)+1\right]\left[f(y)+y\right]=f'(x+y)+1\ (3)$

Αν παραγωγίσουμε την (1) με μεταβλητή το y βρίσκουμε ότι: $\left[f'(y)+1\right]\left[f(x)+x\right]=f'(x+y)+1$ (4)

Από (3) και (4) προκύπτει: $\left[f'(x)+1\right]\left[f(y)+y\right]=\left[f'(y)+1\right]\left[f(x)+x\right]$.

ΑΣΚΗΣΗ 30

2. Θεωρούμε ν-οστού βαθμού πολυώνυμο $f(x)$, με ρίζες $\rho_1, \rho_2, .. \rho_\nu$ διάφορες μεταξύ τους πραγματικές.

i. Να δειχθεί ότι οι ρίζες του $f(x)$ δεν είναι ρίζες της παραγώγου του.

ii. Να δειχθεί αν ένα πολυώνυμο $f(x)$ έχει ρίζες απλές πραγματικές, τότε το πολυώνυμο $g(x)=[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)$ δεν έχει ρίζες πραγματικές.

Υπόδειξη :

i. Είναι $f(x)=\alpha_\nu(x-\rho_1)(x-\rho_2)...(x-\rho_\nu)$, με $\alpha_\nu \neq 0$ και :

$$f'(x)=\alpha_\nu(x-\rho_2)(x-\rho_3)...(x-\rho_\nu)+\alpha_\nu(x-\rho_1)(x-\rho_3)...(x-\rho_\nu)+...+$$
$$+\alpha_\nu(x-\rho_1)(x-\rho_2)...(x-\rho_{\nu-1}) \quad (1)$$

Η (1) για $x=\rho_1$, δίνει $f'(\rho_1)=\alpha_\nu(\rho_1-\rho_2)(\rho_1-\rho_3)...(\rho_1-\rho_\nu)\neq 0$ (εφόσον οι ρίζες του f(x) είναι διάφορες μεταξύ τους).

Ανάλογα δείχνουμε ότι $f'(\rho_2)\neq 0, f'(\rho_3)\neq 0, ..., f'(\rho_\nu)\neq 0$

ii. Έστω ότι οι ρίζες του $f(x)$ είναι $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_\nu$ και ρ η τυχαία απ' αυτές, θα δείξουμε ότι $g(\rho)\neq 0$.

Είναι: $g(\rho)=[f'(\rho)]^2 - f(\rho)f''(\rho)=[f'(\rho)]^2 \quad (1)$

Είναι όμως, $f'(\rho)\neq 0$, γιατί οι απλές ρίζες ενός πολυωνύμου δεν είναι ρίζες της παραγώγου του. Επομένως από (1) έχουμε $g(\rho)\neq 0$. Θα δείξουμε τώρα ότι το $g(x)$ δεν έχει ρίζες στο σύνολο $\mathbb{R}-\{\rho_1, \rho_2, ..., \rho_\nu\}$.

Είναι: $f(x)=\kappa(x-\rho_1)(x-\rho_2)...(x-\rho_\nu)$ (με κ σταθερά), οπότε:

$$f'(x)=\kappa(x-\rho_2)(x-\rho_3)...(x-\rho_\nu)+$$
$$+\kappa(x-\rho_1)(x-\rho_3)...(x-\rho_\nu)+...+\kappa(x-\rho_1)(x-\rho_2)...(x-\rho_{\nu-1})\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-\rho_1}+\frac{1}{x-\rho_2}+...+\frac{1}{x-\rho_\nu}\overset{\pi\alpha\rho\alpha\gamma.}{\Rightarrow}$$
$$\Rightarrow \frac{f''(x)f(x)-f'(x)f'(x)}{[f(x)]^2}=-\left[\frac{1}{(x-\rho_1)^2}+\frac{1}{(x-\rho_2)^2}+...+\frac{1}{(x-\rho_\nu)^2}\right]\Rightarrow$$
$$\Rightarrow g(x)=[f'(x)]^2-f(x)f''(x)=[f(x)]^2\left[\frac{1}{(x-\rho_1)^2}+\frac{1}{(x-\rho_2)^2}+...+\frac{1}{(x-\rho_\nu)^2}\right] \quad (2)$$

Το δεύτερο μέλος της (2) είναι θετικό $\forall x\in\mathbb{R}-\{\rho_1, \rho_2, ..., \rho_\nu\}$, επομένως το g(x) δεν έχει ρίζες ούτε στο σύνολο $\mathbb{R}-\{\rho_1, \rho_2, ..., \rho_\nu\}$.

Άρα το g(x) δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΗ 31

3. Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=F(x)|x-3|$, όπου $F(x)$ είναι πολυώνυμο ν-οστού βαθμού. Αν η f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$, να δειχθεί ότι το πολυώνυμο $F(x)$ έχει ρίζα $\rho=3$.

Υπόδειξη :

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, θα είναι και στο σημείο $x_0 = 3$.

'Αρα: $f'_\alpha(3) = f'_\delta(3)$ (1)

Είναι: $f'_\alpha(3) = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{F(x)|x-3|}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{F(x)(-x+3)}{x-3} = -F(3)$

Και: $f'_\delta(3) = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{F(x)|x-3|}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{F(x)(x-3)}{x-3} = F(3)$

Από την (1) προκύπτει: $-F(3) = F(3) \Leftrightarrow 2F(3) = 0 \Leftrightarrow F(3) = 0$

Επομένως ο 3 είναι ρίζα του πολυωνύμου $F(x)$.

ΑΣΚΗΣΗ 31

11. Να δειχθεί ότι αν μια πολυωνυμική συνάρτηση f μηδενίζεται για κ διαφορετικές πραγματικές τιμές του x, τότε η f' θα μηδενίζεται για κ-1 τουλάχιστον τιμές του x.

Υπόδειξη :

'Εστω $f(\rho_1) = f(\rho_2) = ... = f(\rho_\kappa) = 0$. Επομένως σε κάθε διάστημα $[\rho_i, \rho_{i+1}]$ $i = 1, 2, 3, ..., (\kappa - 1)$ θα εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle, οπότε σε κάθε διάστημα (ρ_i, ρ_{i+1}) θα υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ_i τέτοιο ώστε: $f'(\xi_i) = 0$.

Επειδή τα διαστήματα είναι κ-1, θα υπάρχουν κ-1 τουλάχιστον πραγματικοί αριθμοί ξ_i τέτοιοι ώστε $f'(\xi_i) = 0$ με $i = 1, 2, ..., (\kappa - 1)$.

Άρα η f' θα μηδενίζεται για κ-1 τουλάχιστον τιμές του x.