ΑΣΚΗΣΗ 11

Να αποδείξετε ότι: $\left(\dfrac{\alpha+x}{\beta+x}\right)^{\beta+x} > \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\beta}$ $\;\;$ για κάθε $x>0$, με $\alpha,\beta>0$ και $\alpha\neq\beta$

Υπόδειξη :

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\left(\dfrac{\alpha+x}{\beta+x}\right)^{\beta+x}$ για κάθε $x>0$, με $\alpha,\beta>0$ και $\alpha\neq\beta$ για την οποία

έχουμε : $f'(x)=f(x)\left[\log\left(\dfrac{\alpha+x}{\beta+x}\right)+\dfrac{\beta-\alpha}{\alpha+x}\right]$ και επειδή $f(x)>0$ για κάθε $x>0$ αρκεί να βρούμε το

πρόσημο της $g(x)=\log\left(\dfrac{\alpha+x}{\beta+x}\right)+\dfrac{\beta-\alpha}{\alpha+x}$, $x>0$. Έχουμε $g'(x)=-\dfrac{(\beta-\alpha)^2}{(\alpha+x)^2(\beta+x)}<0$, $x>0$ και

άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα οπότε: $g(x)>\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$

Επειδή $f'(x)=f(x)\cdot g(x)$ $\Rightarrow$ $f'(x)>0$ δηλαδή η f(x) είναι γνησίως αύξουσα για x>0 και άρα

$f(x)>\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{\beta}$

ΑΣΚΗΣΗ 12

Έστω $f:IR\to IR$ μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(x)>0$ και

$f''(x)\cdot f(x)-[f'(x)]^2>0$ για κάθε $x\in IR$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\dfrac{f'}{f}$ είναι γνησίως

αύξουσα και ότι : $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\leq\sqrt{f(x)\cdot f(y)}$ για κάθε $x,y\in IR$.

Υπόδειξη :

Επειδή είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in IR$ μπορούμε να ορίσουμε $g(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$, $x\in IR$. Επειδή η f είναι

δύο φορές παραγωγίσιμη θα έχουμε: $g'(x)=\dfrac{f''(x)\cdot f(x)-[f'(x)]^2}{[f(x)]^2}>0$ (λόγω της υπόθεσης). Άρα η

g είναι γνησίως αύξουσα.

Απόδειξη της σχέσης : $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\leq\sqrt{f(x)\cdot f(y)}$ για κάθε $x,y\in IR$

1ος τρόπος

Υποθέτουμε ότι x<y και θέτουμε $z=\dfrac{x+y}{2}$ οπότε

x<z<y και επομένως αρκεί να δείξουμε ότι:

$f(x)\leq\sqrt{f(x)\cdot f(2z-x)}$ $\;\;$ $x<z$ και $x,z\in IR$

2ος τρόπος

Επειδή είναι $f(x)>0$ για κάθε $x\in IR$ μπορούμε να

ορίσουμε τη συνάρτηση

$\varphi(u)=\log f(u)$, $u\in[x,y]$ $\;$ (υποθ $x<y$) και

$f(x) \le \sqrt{f(x)\cdot f(2z-x)}$, $x<z$ και $x, z \in IR$.

Επειδή f(x)>0 αρκεί να δείξουμε ότι:

$f(x)\cdot f(2z-x) - f^2(z) \ge 0$, $x<z$ και $x, z \in IR$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$h(x) = f(x)\cdot f(2z-x) - f^2(z)$, $x \in (-\infty, z]$ και

έχουμε

$$h'(x) = \ldots = \frac{g(x) - g(2z-x)}{f(x)\cdot f(2z-x)} < 0 \quad , \quad x \in (-\infty, z]$$

αφού f(x)>0 και η g είναι γνησίως αύξουσα.

Επομένως η h είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε

$h(x) \ge h(z) = 0 = \ldots$

εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα $[x, \frac{x+y}{2}]$ και $[\frac{x+y}{2}, y]$......

ΑΣΚΗΣΗ 13

Δίνεται η συνάρτηση $f: IR \to IR$, δύο φορές παραγωγίσιμη, η οποία σε σημείο $x_0 \in IR$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο το 0 και ικανοποιεί τη σχέση:

$f''(x) > 4\cdot(f'(x) - f(x))$, για καθε $x \in IR$.

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x)\cdot e^{-2x}$ είναι κυρτή στο IR.
2. Να αποδείξετε ότι: $f(x) \ge 0$ για κάθε $x \in IR$

Υπόδειξη :

1. $g'(x) = f'(x)\cdot e^{-2x} - 2f(x)\cdot e^{-2x}$, $x \in IR$ και

   $g''(x) = f''(x)\cdot e^{-2x} - 2f'(x)\cdot e^{-2x} - 2f'(x)\cdot e^{-2x} + 4f(x)\cdot e^{-2x} =$

   $= e^{-2x}\cdot(f''(x) - 4f'(x) + 4f(x)) > 0$, $x \in IR$

2. Άρα η g' είναι γνησίως αύξουσα και επομένως έχουμε:

   $x \le x_0 \Rightarrow g'(x) \le g'(x_0) = 0$ και άρα η g στο $(-\infty, x_0]$ είναι γνησίως φθίνουσα

   δηλαδή $g(x) = f(x)\cdot e^{-2x} \ge g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x) \ge 0$. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε

   και όταν $x \ge x_0$

ΑΣΚΗΣΗ 14

Να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{x \to +\infty}\left[x\cdot \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right]$

Υπόδειξη :

Είναι $x\cdot\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}{\frac{1}{x}}$ δηλαδή όταν $x\to+\infty$ έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$.

Επίσης $\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right]'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2-1}=2$ και άρα από το θεώρημα De L ' Hospital έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\cdot\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right]=2$$

ΑΣΚΗΣΗ 15

Να αποδείξετε ότι: $\lim_{x\to0}\left(\frac{\alpha^x+\beta^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\sqrt{\alpha\cdot\beta}\quad$ με $\alpha,\beta>0$

Υπόδειξη :

Έχουμε απροσδιοριστία της μορφής 1^∞

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\left(\frac{\alpha^x+\beta^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$, $x\neq0$ η οποία παίρνει τη μορφή

$f(x)=e^{\frac{\log\left(\frac{\alpha^x+\beta^x}{2}\right)}{x}}$, $x\neq0$ και επειδή η εκθετική συνάρτηση είναι συνεχής αρκεί να βρούμε το

$\lim_{x\to0}\frac{\log\left(\frac{\alpha^x+\beta^x}{2}\right)}{x}$. Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος De L' Hospital και έχουμε:

$\lim_{x\to0}\frac{\log\left(\frac{\alpha^x+\beta^x}{2}\right)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\log\left(\frac{\alpha^x+\beta^x}{2}\right)\right)'}{(x)'}=\frac{2}{\alpha^x+\beta^x}\cdot\left(\frac{\alpha^x\log\alpha+\beta^x\log\beta}{2}\right)=\log\sqrt{\alpha\cdot\beta}$ Άρα ...

ΑΣΚΗΣΗ 16

Να αποδείξετε ότι: $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\alpha^x-1}{x\cdot(\alpha-1)}\right)^{\frac{1}{x}}=\begin{cases}1\ , & 0<\alpha<1\\ \alpha\ , & 1<\alpha\end{cases}$

Υπόδειξη :

Είναι : $\left(\dfrac{\alpha^x-1}{x\cdot(\alpha-1)}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{g(x)}$ με $g(x)=\dfrac{1}{x}\cdot\log\left(\dfrac{\alpha^x-1}{x\cdot(\alpha-1)}\right)$ και άρα αρκεί να βρούμε το $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ που

είναι απροσδιόριστη μορφή $\dfrac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}\cdot\log\left(\frac{\alpha^x-1}{x\cdot(\alpha-1)}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\log\left(\dfrac{\alpha^x-1}{x\cdot(\alpha-1)}\right)\right]'}{(x)'}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\dfrac{\alpha^x}{1-\alpha^x}\log\alpha-\dfrac{1}{x}\right], & 0<\alpha<1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{\alpha^x}{\alpha^x-1}\log\alpha-\dfrac{1}{x}\right], & 1<\alpha\end{cases}$$

………

ΑΣΚΗΣΗ 17

Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί α , β ώστε η συνάρτηση f με

$f(x)=\lim\limits_{\nu\to+\infty}\dfrac{x^2+(\alpha\cdot x^2+\beta+1)\cdot e^{\nu\cdot x}}{2+e^{\nu\cdot x}}$ να είναι παραγωγίσιμη στο IR.

Υπόδειξη :

Αν $x=0\Rightarrow f(0)=\lim\limits_{\nu\to+\infty}\dfrac{\beta+1}{3}=\dfrac{\beta+1}{3}$

Αν $x>0\Rightarrow f(x)=\lim\limits_{\nu\to+\infty}\dfrac{\dfrac{x^2}{e^{\nu x}}+(\alpha\cdot x^2+\beta+1)}{\dfrac{2}{e^{\nu x}}+1}=\alpha\cdot x^2+\beta+1$

Αν $x<0\Rightarrow f(x)=\lim\limits_{\nu\to+\infty}\dfrac{x^2+(\alpha\cdot x^2+\beta+1)\cdot\dfrac{1}{e^{-\nu x}}}{2+\dfrac{1}{e^{-\nu x}}}=\dfrac{x^2}{2}$

Επομένως $f(x)=\begin{cases}\alpha\cdot x^2+\beta+1, & x>0\\ \dfrac{x^2}{2}, & x<0\\ \dfrac{\beta+1}{3}, & x=0\end{cases}$ Προφανώς η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x\neq 0$. Για να είναι παραγωγίσιμη και στο $x=0$ πρέπει κατ᾽ αρχάς να είναι συνεχής ……. Από όπου προκύπτει β= -1

Για να είναι παραγωγίσιμη πρέπει …… $\alpha\in \mathrm{IR}$.

ΑΣΚΗΣΗ 18

Δίνεται η συνάρτηση $f : IR \to IR$, για την οποία είναι :

$f(x+y)=\alpha\cdot x\cdot y+f(x)$ για κάθε $x\,,y\in IR$ με $\alpha\in IR$ και $f(1)=-1$, $f(2)=2$.

1. Να αποδείξετε ότι η f παραγωγίζεται .
2. Να βρείτε τον τύπο της f .

Υπόδειξη :

1. $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\alpha\cdot x\cdot h+f(x)-f(x)}{h}=\alpha\cdot x$ δηλ. $f'(x)=\alpha\cdot x$ για κάθε $x\in IR$

   και επομένως παραγωγίζεται.

2. Αφού $f'(x)=\alpha\cdot x$ για κάθε $x\in IR \Rightarrow f(x)=\dfrac{\alpha\cdot x^2}{2}+c$, $x\in IR$

   Προσδιορισμός των α , c:

$$\left\{\begin{matrix} f(1)=-1 \\ \text{και} \\ f(2)=2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \dfrac{\alpha}{2}+c=-1 \\ \text{και} \\ 2\cdot\alpha+c=2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \alpha=2 \\ \text{και} \\ c=-2 \end{matrix}\right\}$$ δηλ. $f(x)=x^2-2$

ΑΣΚΗΣΗ 19

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f , g στο διάστημα [0 , 2]. Αν ισχύει

$2\cdot[f(x)]^2-[g(x)]^3+9=0$ για κάθε $x\in[0\,,2]$ και $f(1)=3$, $f'(1)=-2$, να αποδείξετε ότι:

$g(1)=3$ και $g'(1)=-\dfrac{8}{9}$

Υπόδειξη :

Για x=1 έχουμε : $2\cdot[f(1)]^2-[g(1)]^3+9=0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow g(1)=3$

Παραγωγίζοντας την δεδομένη σχέση έχουμε:

$4\cdot f(x)\cdot f'(x)-3\cdot[g(x)]^2\cdot g'(x)=0 \overset{x=1}{\Rightarrow} \ldots \Rightarrow g'(1)=-\dfrac{8}{9}$

ΑΣΚΗΣΗ 20

Δίνεται η άρτια συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο IR και η συνάρτηση g με

$g(x)=(x^2+1)\cdot f(x)+3x$.

1. Βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g.
2. Να αποδείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο IR.
3. Να αποδείξετε ότι $g'(0)=3$

Υπόδειξη :

1. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο IR θα έχει πεδίο ορισμού το IR. Οι συναρτήσεις φ(x)=x^2 +1 και h(x)=3x έχουν πεδίο ορισμού το IR και άρα το πεδίο ορισμού της g είναι το IR.
2. Αφού οι f , φ , h είναι παραγωγίσιμες και η g θα είναι παραγωγίσιμη στο IR.
3. $g(x) = (x^2+1)\cdot f(x) + 3x \Rightarrow g'(x) = 2\cdot x\cdot f(x) + (x^2+1)\cdot f'(x) \Rightarrow g'(0) = f'(0)+3$. Όμως η f είναι άρτια δηλ.

$$f(-x) = f(x) \text{ για κάθε } x \in IR \Rightarrow -f'(-x) = f'(x) \overset{x=0}{\Rightarrow} -f'(0) = f'(0) \Rightarrow f'(0)$$

Άρα $g'(0) = 3$