ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΘΕΩΡΗΜΑΤΩΝ ROLLE

*** ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

1. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [-α,α] , α>0 και δύο φορές παραγωγίσιμη στο (-α,α) με f(0)=f(α)=f(-α), να δείξετε ότι υπάρχει σημείο $\xi\in(-\alpha,\alpha)$: $f''(\xi)=0$

Υπόδειξη: Από το Θ. Rolle στα [-α,0] και [0,α] προκύπτουν $\xi_1\in(-\alpha,0)$ και $\xi_2\in(0,\alpha)$ ώστε $f'(\xi_1)=0$ και $f'(\xi_2)=0$. Εφαρμόζουμε τώρα το Θ. Rolle για την f στο $[\xi_1,\xi_2]$ ….

2. Αν f , g είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α,β] , παραγωγίσιμες στο (α,β) με $\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}=\frac{f(\beta)}{g(\beta)}$ και $g(\chi)\neq 0$ για κάθε $\chi\in[\alpha,\beta]$, $g'(\chi)\neq 0$ για κάθε $\chi\in(\alpha,\beta)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$: $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(\xi)}{g(\xi)}$

Υπόδειξη: Θ. Rolle στο [α,β] για την συνάρτηση h(χ)=f(χ)/g(χ) …..

3. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [-α,α] , α>0 και δύο φορές παραγωγίσιμη στο (-α,α) με f(-α)=α , f(α)=-α , f(0)=0 να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(-\alpha,\alpha)$: $f''(\xi)=0$

Υπόδειξη: Θ. Rolle στα [-α,0] και [0,α] για την συνάρτηση h(χ)=f(χ)+χ …

4. Αν f , g είναι συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο [α,β] με f(α)=f(β)=0 και $f'(\chi).g(\chi)-f(\chi).g'(\chi)\neq 0$ για κάθε $\chi\in[\alpha,\beta]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$:g(ξ)=0

Υπόδειξη: Για χ=α και χ=β από την υπόθεση προκύπτει ότι $g(\alpha)\neq 0$ και $g(\beta)\neq 0$. Έστω ότι είναι $g(\chi)\neq 0$ για κάθε $\chi\in(\alpha,\beta)$. Τότε εφαρμόζοντας το Θ. Rolle για την h(χ)=f(χ)/g(χ) στο [α,β] ……….

Aris Nikolaidis

5. Αν f , g είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α,β] , παραγωγίσιμες στο (α,β) με f(α)=g(β)=0 , f(χ).g(χ) $\neq 0$ για κάθε χ$\in$[α,β] και 0$\notin$[α,β] , να αποδείξετε ότι: υπάρχει ξ$\in$(α,β): $\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}+\frac{g'(\xi)}{g(\xi)}=\frac{1}{\xi}$

Υπόδειξη: Θ. Rolle στ0 [α,β] για την συνάρτηση h(χ)=f(χ).g(χ)/χ …

6. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f|[α,β] που είναι παραγωγίσιμη στο(α,β) με f(α)=f(β). Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ξ_1 , $\xi_2 \in$(α,β): $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=0$

Υπόδειξη: Θ.Μ.Τ.Δ.Λ για την f στα διαστήματα [α,(α+β)/2] και [(α+β)/2,β] ….

7. Αν $f(\chi)=(\chi-\alpha)^{\kappa}.(\chi-\beta)^{\lambda}$ με α,β$\in$R και κ,λ$\in$N, να αποδείξετε ότι υπάρχει ξ$\in$(α,β): (ξ-α).λ+κ.(ξ-β)=0

Υπόδειξη: Θ. Rolle στο [α,β] για την συνάρτηση f(χ) …..

8. Αν f(χ)=lnχ , να αποδείξετε ότι υπάρχει ξ$\in$(1,2e): $\xi=\frac{2e-1}{1+\ln 2}$

Υπόδειξη: Θ. Bolzano για την f(χ)=(1+ln2).χ+1-2.e |[1,2e]

ή Θ.Μ.Τ.Δ.Λ ή Θ.Μ.Τ.Ο.Λ για την f(χ)=1/χ

9. Αν $f(\chi)=e^{x}$ να αποδείξετε ότι υπάρχει ξ$\in$(-1,1): $\xi=\ln\frac{e^2-1}{2e}$

10. Αν f(χ)=χ.lnχ να αποδείξετε ότι:

I) υπάρχει ξ$\in$(1,e): $\xi=e^{\frac{1}{e-1}}$

II) υπάρχει ξ$\in$(α,β): $\xi=\frac{1}{e}\left(\frac{\beta^{\beta}}{\alpha^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\beta-\alpha}}$

11. (Θεώρημα Cauchy): Αν f , g είναι συνεχείς συναρτήσεις στο [α,β] , παραγωγίσιμες στο (α,β) με g΄(χ) $\neq$0 για κάθε χ$\in$[α,β] τότε:

I) g(α) $\neq$g(β) και

II) υπάρχει ξ$\in$(α,β): $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(\beta)-f(a)}{g(\beta)-g(a)}$

12. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f|[α,β] που είναι παραγωγίσιμη στο(α,β) και ακόμη f(χ)>0 για κάθε χ$\in$[α,β]. Να δείξετε ότι υπάρχει ξ$\in$(α,β):

$$\frac{f(\beta)}{f(\alpha)}=e^{\frac{(\beta-\alpha)f'(\xi)}{f(\xi)}}$$

Υπόδειξη: Θ.Μ.Τ για την συνάρτηση g(χ)=lnf(x) στο [α,β] ….

13. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f|[α,β] που είναι παραγωγίσιμη στο(α,β) και ακόμη f(χ)>0 για κάθε χ$\in$(α,β). Να δείξετε ότι υπάρχει ξ$\in$(α,β):

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{\ln f(\beta)-\ln f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$