ΕΥΡΕΣΗ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ f ΟΤΑΝ ΔΙΝΕΤΑΙ ΜΙΑ ΣΧΕΣΗ ΠΟΥ ΣΥΝΔΕΕΙ ΤΗΝ f ΚΑΙ ΤΗΝ f΄

1ος τρόπος :

Μετασχηματίζουμε την δοθείσα σχέση ώστε να πάρουμε μια από τις παρακάτω μορφές και στην συνέχεια όπως φαίνεται από τον πίνακα που ακολουθεί θεωρούμε κατάλληλη συνάρτηση g ώστε g΄(x)=0 δηλ. η g σταθερή.

Δεδομένη Σχέση	Βοηθητική συνάρτηση g	Η συνάρτηση f
$f'(x)=cf(x)$	$g(x)=e^{-c\cdot x}\cdot f(x)$	$f(x)=k\cdot e^{c\cdot x}$
$f'(x)=h'(x)\cdot f(x)$	$g(x)=e^{-h(x)}\cdot f(x)$	$f(x)=k\cdot e^{h(x)}$
$f'(x)\cdot(x-c)=f(x)$	$g(x)=\dfrac{f(x)}{x-c}$	$f(x)=k\cdot(x-c)$
$f'(x)\cdot(c-x)=f(x)$	$g(x)=(x-c)\cdot f(x)$	$f(x)=\dfrac{k}{x-c}$
$x\cdot f'(x)=\nu\cdot f(x)$	$g(x)=\dfrac{f(x)}{x^{\nu}}$	$f(x)=k\cdot x^{\nu}$

2ος τρόπος :

Μετασχηματίζουμε την δοθείσα σχέση σε ισοδύναμη της $g(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ και στην συνέχεια ολοκληρώνουμε και στα δύο μέλη. Αυτός ο τρόπος εφαρμόζεται μόνο αν μπορούμε να εξασφαλίσουμε το πρόσημο της f.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1 :

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο IR με συνεχή παράγωγο και ισχύει: $x\cdot f'(x)=3\cdot f'(x)+f(x)$ με $x\neq 3$ και $f'(3)=2$, να βρείτε την συνάρτηση f.

Λύση

$x\cdot f'(x)=3\cdot f'(x)+f(x)\Leftrightarrow(x-3)\cdot f'(x)=f(x)$ Θεωρούμε τη συνάρτηση

$g(x)=\dfrac{f(x)}{x-3}$, $x\neq 3$ που είναι παραγωγίσιμη με $g'(x)=0\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow f(x)=c\cdot(x-3)$. Όμως η f είναι συνεχής στο 3 και άρα $f(3)=\lim\limits_{x\to 3}f(x)=0$

Όμως $f(x)=c\cdot(x-3)$, $x\in IR$ και $f'(3)=2$

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=2\overset{\frac{0}{0}}{\Leftrightarrow}\lim_{x\to 3}\frac{f'(x)}{1}=2\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow c=2$$. Άρα $f(x)=2(x-3)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2 :

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με $x \cdot f''(x) = \nu \cdot f'(x)$ για κάθε $x \in IR$ και $\nu \in IN^*$. Αν $f'(1) = 1995$, $f(0) = 1996$, να βρείτε την συνάρτηση f.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f'(x)}{x^\nu}$, $x \neq 0$ $\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = c$. Άρα

$\dfrac{f'(x)}{x^\nu} = c \Leftrightarrow f'(x) = c \cdot x^\nu$. Αφού η f' είναι παραγωγίσιμη στο IR θα είναι συνεχής δηλ.

$$\lim_{x \to 1} f'(x) = f'(1) = 1995 \Leftrightarrow c = 1995$$

$$\int f'(x)dx = \int 1995 \cdot x^\nu dx \Leftrightarrow f(x) = \frac{1995 \cdot x^{\nu+1}}{\nu+1} + k \quad , \quad f(0) = 1996 \Leftrightarrow k = 1996$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3:

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο IR με $\int_0^x e^{2 \cdot f(t)} \cdot f(t)dt = e^{2 \cdot f(x)} - e^{100}$. Να βρεθεί η f.

Λύση

Η συνάρτηση $F(x) = \int_0^x e^{2 \cdot f(t)} \cdot f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη με $F'(x) = e^{2 \cdot f(x)} \cdot f(x)$ και άρα

$e^{2 \cdot f(x)} \cdot f(x) = 2 \cdot f'(x) \cdot e^{2 \cdot f(x)} \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2} \cdot f(x)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^{-\frac{1}{2} \cdot x} \cdot f(x)$

και έχουμε $g'(x) = \left(e^{-\frac{1}{2} \cdot x} \cdot f(x) \right)' = \ldots = 0 \Leftrightarrow g(x) = k \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow f(x) = k \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$. Από την υπόθεση

για x=0 προκύπτει … k=50

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4:

Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη για $x \geq 3$ με $\int_3^x \dfrac{f(t)}{2-t} dt = f(x) - 398$ και $f(4) = 199$. Να βρεθεί η f.

Λύση

Παραγωγίζοντας την δεδομένη σχέση έχουμε $\frac{f(x)}{2-x}=f'(x)\Leftrightarrow f(x)=(2-x)\cdot f'(x)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=(x-2)\cdot f(x)\;\;,\;\; x\geq 3\;\;\Rightarrow\;\; g'(x)=0\Leftrightarrow g(x)=k\Leftrightarrow f(x)=\frac{k}{x-2}$

$f(4)=199\Leftrightarrow \frac{k}{2}=199\Leftrightarrow k=398$ και άρα $f(x)=\frac{398}{x-2}\;\;,\;\; x\geq 3$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5:

Έστω η συνάρτηση $f:\mathrm{IR}_+^*\to \mathrm{IR}_+^*$ με $f(x)=(x-1996)\cdot f'(x)$ και $f(1)=e$. Να βρείτε την f.

Λύση

$f(x)=(x-1996)\cdot f'(x)\;\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x-1996}\Leftrightarrow (\ln(f(x))'=(\ln|x-1996|)'\;\Rightarrow f(x)=|x-1996|+k$

$f(1)=e\Leftrightarrow k=e-1995$ και άρα $f(x)=|x-1996|+e-1995$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6:

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,+\infty)$ με

$\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{t^2+t+1}}dt=\frac{f(x)}{2x+1}-e$ και $f(x)>0$. Να βρείτε την f.

Λύση

Παραγωγίζοντας την δεδομένη σχέση κατά μέλη έχουμε:

$\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{f'(x)\cdot(2x+1)-2\cdot f(x)}{(2x+1)^2}\Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{2}{2x+1}$ και επομένως:

$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\int\left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}+\frac{2}{2x+1}\right)dx\Leftrightarrow \ln f(x)=\int\frac{(x^2+x+1)'}{\sqrt{x^2+x+1}}+\int\frac{(2x+1)'}{2x+1}dx$ και άρα

$\ln f(x)=2\sqrt{x^2+x+1}+\ln(2x+1)+c\;\;\Rightarrow\;\; f(x)=e^{2\sqrt{x^2+x+1}+\ln(2x+1)+c}$ και από την υπόθεση για x=0 προκύπτει c=-1

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7:

Να υπολογίσετε το $\int f(x)dx$ αν είναι γνωστό ότι:

$f:(-\infty,\frac{3}{2})\to \mathrm{IR}$, με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(-\infty,\frac{3}{2})$ και $f(x)=2+\int_1^x f^2(t)dt$.

Λύση

$f'(x)=f^2(x) \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=1 \Rightarrow \int \dfrac{f'(x)}{f^2(x)}dx=\int 1dx \Rightarrow -\dfrac{1}{f(x)}=x+c$. Εξ άλλου για x=1 έχουμε

$c=-\dfrac{3}{2}$. Επομένως $f(x)=-\dfrac{2}{2x-3} \Rightarrow \int f(x)dx=-\int \dfrac{2}{2x-3}dx=-2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot \ln|2x-3|=-\ln(3-2x)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8:

Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση :

$$f:(-\infty,0)\to(0,+\infty) \quad \text{με} \quad \sigma\upsilon\nu\left(\int_0^x f(t)dt\right)=e^x \quad \text{για κάθε } x<0$$

Λύση

Παραγωγίζοντας τη δεδομένη σχέση έχουμε: $\eta\mu\left(\int_0^x f(t)dt\right)=\dfrac{-e^{-x}}{f(x)}$

Όμως από την ταυτότητα $\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu^2\omega=1$ έχουμε

$$\left(\frac{-e^{-x}}{f(x)}\right)^2+e^{2x}=1 \Rightarrow \frac{e^{-2x}}{f^2(x)}=1-e^{2x} \Rightarrow f^2(x)=\frac{e^{-2x}}{1-e^{2x}} \Rightarrow f(x)=\frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9:

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f που ικανοποιεί τη σχέση:

$3-e^x+f(x)+x\cdot f'(x)=\int_0^1(2t+1)dt$, για κάθε $x\in IR$. Να βρείτε τον τύπο της f.

Λύση

$$3-e^x+f(x)+x\cdot f'(x)=\int_0^1(2t+1)dt \Leftrightarrow 3-e^x+f(x)+x\cdot f'(x)=\left[t^2+t\right]_0^1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3-e^x+f(x)+x\cdot f'(x)=2 \Leftrightarrow f(x)+x\cdot f'(x)=e^x-1 \Leftrightarrow (x\cdot f(x))'=(e^x-x)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\cdot f(x)=e^x-x+c$$

και για x=0 προκύπτει c = -1. Άρα $f(x)=\dfrac{e^x-x-1}{x}$, $x\in IR^*$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10:

Να βρεθεί μια συνάρτηση f , ορισμένη στο διάστημα (0 , 2π) για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$\frac{1}{x}\cdot f'(x)-\frac{1}{x^2}\cdot f(x)=\eta\mu\sqrt{x} \quad \kappa\alpha\iota \quad f(\frac{\pi^2}{4})=0$$

Λύση

Είναι $\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\eta\mu\sqrt{x}\Leftrightarrow\int\left(\frac{f(x)}{x}\right)'dx=\int\eta\mu\sqrt{x}dx\Leftrightarrow\frac{f(x)}{x}=\int\eta\mu\sqrt{x}dx$. θέτουμε $\sqrt{x}=u$ ....

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:IR\rightarrow IR$ με $f(x)=\lim\limits_{h\to x}\frac{f(h)-f(x)}{h-x}$ για κάθε $x\in IR$. Να βρεθεί ο τύπος της f.

Υπόδειξη

Παρατηρείστε ότι $f(x)=f'(x)$ ....

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 12:

Θεωρούμε την δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:IR\rightarrow IR$ με $f'(x)+f''(x)=0$, για καθε $x\in IR$ και $f(0)=f'(0)=0$. Να βρείτε τον τύπο της f.

Υπόδειξη

Έστω $h(x)=[f(x)]^2+[f'(x)]^2$. Τότε $h'(x)=...=0\Rightarrow h(x)=c$ κ.λ.π.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13:

Να βρείτε τη συνάρτηση $g:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\rightarrow IR$ για την οποία ισχύει

$$g'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x+g(x)\cdot\eta\mu x=g(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x \quad \kappa\alpha\iota \quad g(0)=1995$$

Υπόδειξη

$$g'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x+g(x)\cdot\eta\mu x=g(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x\Rightarrow\frac{g'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x-g(x)\cdot(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{g(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\frac{g(x)}{\sigma\upsilon\nu x}\right)'=\frac{g(x)}{\sigma\upsilon\nu x}$$

$$\frac{g(x)}{\sigma\upsilon\nu x}=c\cdot e^x \text{ ....}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 14:

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση

$f: IR \to IR$ με $2 \cdot f'(x) + 3x \cdot f^2(x) = 0$, για καθε $x \in IR$ και $f(0) = 1$

1. Να βρείτε τον τύπο της f
2. Να αποδείξετε ότι: $\int_0^{10} f(x)dx \le 10$

Υπόδειξη

Από την δεδομένη σχέση έχουμε

1. $2 \cdot f'(x) + 3x \cdot f^2(x) = 0 \Rightarrow -\dfrac{f'(x)}{f^2(x)} = \dfrac{3}{2} \cdot x \Rightarrow \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{3}{4} \cdot x^2 + c$..........
2. Είναι

$f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (0,10)$ και άρα f γνησίως φθίνουσα οπότε $f(x) \le f(0)$

$\Rightarrow \int_0^{10} f(x)dx \le 10$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 15:

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (1, +\infty) \to IR$ με $f(x) = -\dfrac{x \cdot f'(x)}{2} \cdot \ln x$. Να αποδείξετε ότι:

1. Η συνάρτηση $g(x) = f(x) \cdot \ln^2 x$ είναι σταθερή στο διάστημα $(1, +\infty)$
2. Αν f(e)=3 , να βρείτε την συνάρτηση f.
3. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία της.

Υπόδειξη

1. Αρκεί να δείξουμε ότι: $g'(x) = \ldots = 0$
2. $g(x) = c \Rightarrow f(x) = \dfrac{c}{\ln^2 x} \overset{x=e}{\Rightarrow} 3 = \dfrac{c}{2} \Rightarrow c = 6$ και άρα $f(x) = \dfrac{6}{\ln^2 x}$
3. $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 16:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to IR$ με $f(x) = \int_2^x \dfrac{\ln t}{1+t} dt$. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση h με $h(x) = f(x) + f(\dfrac{1}{x})$, αν $f(\dfrac{1}{2}) = 0$.

Υπόδειξη

$$h'(x)=f'(x)+f'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{\ln x}{1+x}-\frac{x\cdot \ln x}{x+1}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{\ln x}{1+x}\cdot\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{\ln x}{x}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(x)=\int\frac{\ln x}{x}dx\Rightarrow h(x)=\frac{(\ln x)^2}{2}+c\quad \text{και για } x=2 \text{ έχουμε } c=-\left(\frac{\ln 2}{2}\right)^2$$