# Γενικά Θέματα

## ( ασκήσεις )

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\lambda^2 \cdot x \cdot e^{\lambda x^2}$ , $x \in R$ και $\lambda > 0$.

   I) Να εξετάσετε την f ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

   II) Να βρείτε το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου που περικλείεται από την $C_f$ , τον άξονα ΟΧ και την ευθεία χ=1/λ.

   III) Να βρείτε το $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} E(\lambda)$

2. I) Να βρείτε την καμπύλη C={M(x,y)|x,y$\in$R}, όταν για τους μιγαδικούς z=x+yi ισχύει: $4|z|^2-4\left[\operatorname{Im}(z)+\frac{1}{2}\right]^2+5=0$

   II) Να βρείτε ποιοι από τους παραπάνω μιγαδικούς έχουν το μικρότερο και ποιοι το μεγαλύτερο όρισμα.

   III) Αν Α , Β είναι οι εικόνες των δύο παραπάνω μιγαδικών αριθμών, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C και τα τμήματα ΟΑ , ΟΒ. ( απάντ: Ε=2/3 τ.μ )

3. Ευθεία (ε) στρέφεται γύρω από το Α(4,2) με ρυθμό $\frac{d\lambda}{dt}=10^{-3}\sec^{-1}$ , όπου $\lambda \in (0,+\infty)$ είναι ο συντελεστής διεύθυνσής της. Εάν η ευθεία (ε) τέμνει τους άξονες Οχ , Οy, στα σημεία Μ , Ν αντίστοιχα, να βρείτε το

ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΜΝ ως προς το χρόνο τη χρονική στιγμή που η ευθεία περνάει από το σημείο Β(5,3).

4. Δίνεται η συνάρτηση f|R , δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και η ευθεία (ε) με συντελεστή διεύθυνσης λ. Αν η (ε) τέμνει την $C_f$ σε τρία διαφορετικά σημεία, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\chi_0 \in R$ τέτοιο ώστε $f''(\chi_0)=0$

   Υπόδειξη:

   Αν $A(\chi_1,f(x_1))$ , $B(\chi_2,f(x_2))$ , $\Gamma(\chi_3,f(x_3))$ με $\chi_1< \chi_2< \chi_3$ τα τρία διαφορετικά σημεία , εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ στα $[\chi_1, \chi_2]$ και $[\chi_2, \chi_3]$ , οπότε βρίσκουμε $\xi_1\in(\chi_1, \chi_2)$ και $\xi_2\in(\chi_2, \chi_3)$ με $f'(\xi_1)= f'(\xi_2)=\lambda$ . Εφαρμόζουμε τώρα για την f το Θ. Rolle στο διάστημα $(\xi_1, \xi_2)$ …

5. Έστω $f:(0,+\infty)\to R$ , δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και υπάρχουν α , β , γ >0 με α<β<γ τέτοια ώστε f(α)=α , f(β)=β , f(γ)=γ. Να αποδείξετε ότι:

   I) υπάρχουν κ , λ>0 τέτοια ώστε $f(\kappa)=\kappa\cdot f'(\kappa)$ , $f(\lambda)=\lambda\cdot f'(\lambda)$

   II) αν η ευθεία που περνά από τα Α(κ, f(κ)) , Β(λ, f(λ)) περνάει και από την αρχή των αξόνων, δείξτε ότι υπάρχει $\chi_0>0$ τέτοιος ώστε $f''(\chi_0)=0$.

   Υπόδειξη:

   Εφαρμόζουμε για την συνάρτηση F(χ)=f(χ)/χ το Θ. Rolle στα διαστήματα [α,β] και [β,γ] …

   Επειδή τα Ο , Α , Β είναι συνευθειακά …. $f'(\lambda)=f'(\kappa)$

   Εφαρμόζουμε τώρα για την $f'$ το Θ. Rolle στο [κ,λ] …

6. I) Να λύσετε στο C την εξίσωση: $2z^2-4z\sigma\upsilon\nu\theta+2\sigma\upsilon\nu^2\theta-\sigma\upsilon\nu\theta+1=0$ όπου $\theta\in[0,\pi)\bigcup(\pi,2\pi]$.

II) Έστω $z_1$ , $z_2$ οι ρίζες της εξίσωσης με $z_1$ αυτή που έχει το φανταστικό της μέρος θετικό. Αν Μ(χ,y) είναι η εικόνα της ρίζας $z_1$ στο μιγαδικό επίπεδο, βρείτε το γ.τ των σημείων Μ όταν $\theta \in [0,\pi/2]$.

III) Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζει ο παραπάνω γ.τ με τους άξονες χ΄χ και y΄y.

Υπόδειξη:

I) Δ=…=-16ημ$^2$(θ/2)<0 … $z_1$=συνθ+iημ(θ/2) και $z_2$=συνθ-iημ(θ/2)

II) Ο ζητούμενος γ.τ είναι το μέρος εκείνο της παραβολής $y^2 = 2\left(-\frac{1}{4}\right)(x-1)$

για το οποίο ισχύουν $0 \le x \le 1 \quad \text{και} \quad 0 \le y \le \frac{\sqrt{2}}{2}$

III) … $E = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx = \ldots = \frac{\sqrt{2}}{3}$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax^2}{x-3} &, \chi<2 \\ -\dfrac{\beta}{x} &, \chi\ge 2 \end{cases}$

I) Να προσδιορίσετε τα α , β ώστε η f να είναι συνεχής και στο $-\propto$ η $C_f$ να έχει πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία y=x+3

II) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

III) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες χ=1 , χ=3 και τον άξονα χ΄χ.

8. Δίνεται η f|R με $f(x) = \int_0^x \frac{tdt}{\sqrt{2+t^4}}$.

I) Να βρείτε την f΄(χ)

II) Να δείξετε ότι η f είναι άρτια.

III) Να υπολογίσετε το $I=\int_{-2}^{2}\frac{xdx}{\sqrt{2+x^4}}$

9. Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο [α,β] και ισχύουν οι σχέσεις f(α)=f(β)=λ , $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=\lambda(\beta-\alpha)$ , $\lambda\in R$ , να αποδείξετε ότι:

ι) η εξίσωση f΄(χ)=0 έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο (α,β)

ιι) υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$: f΄΄(ξ)=0

Υπόδειξη:

Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ Ο.Λ … οπότε f(ρ)=λ.

Εφαρμόζουμε το Θ. Rolle για την f στα διαστήματα [α,ρ] και [ρ,β] …

10. Βρείτε τα α , $\beta\in R$ ώστε η συνάρτηση f με:

$$f(x)=\begin{cases}\int_0^x (2t+1)e^t dt & , \ 0\le x<1\\ \alpha^2-3\alpha+e+3 & , \ x=1\\ \dfrac{(\beta-3\alpha)\eta\mu(\chi-1)}{\chi^2-4\chi+3} & , \ 1<x\le 2\end{cases}$$

να είναι συνεχής στο [0,2]

Υπόδειξη:

$$\int_0^x (2t+1)e^t dt=\ldots=(2x-1)e^x+1$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\ldots=\frac{3\alpha-\beta}{2}$$

11. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\cdot\int_{2}^{2+h}\sqrt{t^2+2}dt\right)$

Υπόδειξη:

Αν f(h)= $\int_{0}^{h}\sqrt{t^2+2}dt$ τότε

$$\int_{2}^{2+h}\sqrt{t^2+2}dt=\int_{2}^{0}\sqrt{t^2+2}dt+\int_{0}^{2+h}\sqrt{t^2+2}dt=\int_{0}^{2+h}\sqrt{t^2+2}dt-\int_{0}^{2}\sqrt{t^2+2}dt$$

=f(2+h)-f(2)

Έτσι

$$\frac{1}{h}\cdot\int_{2}^{2+h}\sqrt{t^2+2}dt=\frac{f(2+h)-f(2)}{h}\Rightarrow\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\cdot\int_{2}^{2+h}\sqrt{t^2+2}dt\right)=f'(2)$$

Όμως $f'(h)=\left(\int_{0}^{h}\sqrt{t^2+2}dt\right)'=\sqrt{h^2+2}\Rightarrow f'(2)=\sqrt{6}$

12. Αν α , β ,γ$\in$ R* ώστε:

$\int_{0}^{1}(1+\sigma\upsilon\nu^4 x)(\alpha x^2+\beta x+\gamma)dx=\int_{0}^{2}(1+\sigma\upsilon\nu^4 x)(\alpha x^2+\beta x+\gamma)dx$ να

αποδείξετε ότι η εξίσωση αχ$^2$+βχ+γ=0 έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (1,2).

Υπόδειξη:

Εύκολα προκύπτει ότι $\int_{1}^{2}(1+\sigma\upsilon\nu^4 x)(\alpha x^2+\beta x+\gamma)dx=0$

Αν f είναι μια παράγουσα της $g(χ)=(1+συν^4χ)(αχ^2+βχ+γ)$ τότε θα έχουμε:

$f'(χ)= (1+συν^4χ)(αχ^2+βχ+γ)$ και άρα

$\int_1^2 (1+συν^4 x)(αx^2+βx+γ)dx = \int_1^2 f'(x)dx = f(2)-f(1)$ Άρα f(2)=f(1)

Εφαρμόζουμε τώρα το Θ. Rolle για την f στο διάστημα [1,2] …

13. Αν η $C_f$ περνά από τα σημεία Α(0,3) και Β(-1,-1) και η f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(χ)=3χ^2+2λχ+5$ , να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f' , τον άξονα ΟΧ και τις ευθείες χ=-1 , χ=0.

Υπόδειξη:

Προφανώς $f(χ)=χ^3+λχ^2+5χ+c$ και από την υπόθεση βρίσκουμε λ=2 , c=3 δηλ. $f(χ)=χ^3+2χ^2+5χ+3$

Ε= $\int_{-1}^{0} |f'(x)|dx = \ldots = 4$

14. Δίνεται η συνάρτηση f|(0,1] με $f(x)=x\cdot\ln x+e^x-1$. Δείξτε ότι η εξίσωση f'(x)=0 έχει μία μόνο λύση στο (0,1] καθώς και η εξίσωση f(x)=0 έχει και αυτή μία μόνο λύση στο (0,1).

15. Δίνεται η συνάρτηση f|[0,1] με $f(x)=\frac{1-x}{3}\cdot e^x$

i) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία , ακρότατα , κοίλα , σημεία καμπής , να γίνει πίνακας μεταβολών της και να βρεθεί το σύνολο τιμών της

ii) Δείξτε ότι η εξίσωση f(x)=x έχει μοναδική ρίζα στο (0,1). Μπορείτε να δείξετε ότι η ρίζα αυτή είναι στο [0,1/3];

16. Έστω f|[α,β] μια συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη. Αν $\chi_1$ , $\chi_2$ , $\chi_3 \in [\alpha,\beta]$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και $f(x_1)$ , $f(x_2)$ , $f(x_3) \in R$ είναι διαδοχικοί όροι άλλης αριθμητικής προόδου, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$: $f''(\xi)=0$

Υπόδειξη:

$X_2-\chi_1=\chi_3-\chi_2$ και $f(x_2)-f(x_1)= f(x_3)-f(x_2)$

Εφαρμόστε το Θ.Μ.Τ και στη συνέχεια το Θ. Rolle …

17. Αν για τη συνάρτηση f|R υπάρχει η f'' και είναι συνεχής η f'', με f(π)=4 και $I = \int_0^{\pi} [f(x) + f''(x)]\eta\mu x dx = 6$ , να υπολογίσετε το f(0).

Υπόδειξη:

Διαπιστώστε ότι $I=I_1+I_2$ , όπου

$$I_1 = \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx = \ldots = \left[- f(x)\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx$$

$$I_2 = \int_0^{\pi} f''(x)\eta\mu x dx = \int_0^{\pi} \left(f'(x)\right)' \eta\mu x dx = \ldots$$

18. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2 - 9}$ και τις ευθείες y=0 , χ=-1 , χ=2.

19. Αν f|R είναι μία συνεχής συνάρτηση και ορίσουμε την συνάρτηση

$g(x) = f(x) \cdot \int_0^x f(t)dt$ , να δείξετε ότι αν η g είναι φθίνουσα , τότε

f(χ)=0 για κάθε $\chi \in$ R.

Υπόδειξη:

Αν θεωρήσουμε $G(x) = \left( \int_0^x f(t)dt \right)^2$ τότε G'(x)=2g(x) και G(0)=0. Επειδή g

φθίνουσα και η G'θα είναι φθίνουσα δηλ. G'(x)$\geq$ G'(0)=0 για κάθε χ$\leq$0 και

G'(x)$\leq$0 για κάθε χ$\geq$0. Άρα η G παρουσιάζει στο $\chi_0$=0 ολικό μέγιστο G(0)=…=0.

Αλλά G(x)$\geq$ 0 για κάθε $\chi \in$ R , άρα G(x)=0 για κάθε $\chi \in$ R ….

20. Έστω η συνάρτηση f|[0,1] παραγωγίσιμη στο [0,1] για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

ι) $\int_0^1 f(x)dx = u$ , u $\in$ R σταθερός

ιι) f(0)=f(1)=u

Να δείξετε ότι υπάρχουν $\chi_1$ , $\chi_2 \in (0,1)$ με $\chi_1 \neq \chi_2$ τέτοια ώστε

f'( $\chi_1$)= f'( $\chi_2$)=0

Υπόδειξη:

Εφαρμόστε το Θ.Μ.Τ.Ο.Λ και μετά το Θ. Rolle στα διαστήματα [0,ξ] και [ξ,1] για την f …

21. Δίνεται η μονοπαραμετρική οικογένεια παραβολών

( c ): y=2x$^2$–3x+2k-1 . Να βρείτε την εξίσωση εκείνης της παραβολής της οικογένειας ( c ) , που η απόστασή της κορυφής της από την αρχή των αξόνων είναι ελάχιστη .