ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1η :

Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f:[0,2]\to IR$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα (0 , 2) ώστε:

$[f'(x)]^2+f(x)\cdot f''(x)=-1$, για κάθε $x\in IR$ και ακόμη $f(1)=1$ και $f'(1)=0$

1. Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,2)$
2. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι: $f(x)=\sqrt{2\cdot x-x^2}$
3. Αν Α , Β είναι τυχαία σημεία της γραφικής παράστασης της f, να δείξετε ότι (ΑΒ) $\leq$ 2 .
4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_0^2 f(x)dx$.

ΑΣΚΗΣΗ 2η :

Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f:IR\to IR$ τέτοια ώστε: $f(x)=\int_0^x\sqrt{1+f^2(t)}dt$, για κάθε $x\in IR$

1. Να δείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο IR και να εκφράσετε την f'' συναρτήσει μόνο της f.
2. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $\varphi(x)=\big(f(x)+f'(x)\big)\cdot e^{-x}$ και $h(x)=\big(f(x)-f'(x)\big)\cdot e^{x}$ είναι σταθερές στο IR και να βρείτε τους τύπους τους.
3. Να βρείτε τον τύπο της f.
4. Ένα κινητό κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. Τη χρονική στιγμή $t_0>0$ που διέρχεται από το σημείο $A(\ln 10,k)$ η τετμημένη του μειώνεται με ρυθμό $20\ \frac{\text{μονάδες}}{s}$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του κινητού τη χρονική στιγμή t_0

ΑΣΚΗΣΗ 3η :

Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f:IR\to IR$ και ο σταθερός ακέραιος α, ώστε για κάθε $x\in IR$ να ισχύουν: $f(x)>0$ και $f(x)=\alpha+\int_{2-x}^{x}\frac{e^x\cdot f(t)}{f(t)+f(2-t)}dt$

1. Να βρείτε την f'' συναρτήσει μόνο της f.
2. Να βρείτε τον τύπο της f.
3. Να βρείτε την μικρότερη τιμή του α.

ΑΣΚΗΣΗ 4η :

Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f:IR \to IR$ για την οποία ισχύει:

$$\int_x^y e^x f(t)dt \leq 2y^2 - 2y \cdot x \quad , \quad \text{για κάθε } x \in IR$$

1. Βρείτε την f.
2. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει συνάρτηση $g:IR \to IR$ ώστε να ισχύει:

$$f(g(x)) = e^2 \quad , \quad \text{για κάθε } x \in IR$$

ΑΣΚΗΣΗ 5η :

Έστω μια συνάρτηση $f:[0,+\infty) \to IR$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) \cdot e^{f(x)} = x \quad , \quad \text{για κάθε } x \in [0,+\infty)$$

Να αποδείξετε ότι:

1. $0 \leq f(x) \leq x$, για κάθε $x \geq 0$.
2. Η f είναι συνεχής στο 0.
3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο 0.
4. Η f είναι γνησίως αύξουσα.
5. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ τότε: $\int_0^1 \frac{1}{1+f(x)}dx = e^{f(1)} - 1$.

ΑΣΚΗΣΗ 6η :

Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f:IR \to IR$, ώστε: $f(x) = 2 \cdot \int_0^x t \cdot e^{-f(t)}dt$, για κάθε $x \in IR$.

1. Να βρείτε την f.
2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
3. Να δείξετε ότι: $\left| f(\beta) - f(\alpha) \right| \leq \left| \beta - \alpha \right|$ για κάθε $\alpha, \beta \in IR$, $\nu \in IN^*$
4. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x^\nu}$, $\nu \in IN^*$

ΑΣΚΗΣΗ 7η :

Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f:IR \to IR$ για την οποία ισχύει:

$$f(x) = 1 + \int_x^{2x} f(t-x)dt \quad , \quad \text{για κάθε } x \in IR$$

1. Να βρείτε την f.
2. Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.
3. Αν $\alpha<\beta<\gamma$ να δείξετε ότι $\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}<\dfrac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}$.
4. Να βρείτε την ευθεία $x=x_0$, που χωρίζει το χωρίο που περικλείεται από την C_f , τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=0 , x=1 σε δύο ισοεμβαδικά χωρία.

ΑΣΚΗΣΗ 8η :

Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f:\mathrm{IR}\to\mathrm{IR}$ για την οποία ισχύει:

$$f(x)=\int_{-x}^{x}\frac{1+t^2}{1+e^{f(t)}}dt \quad , \quad \text{για κάθε } x\in\mathrm{IR}.$$

1. Δείξτε ότι $f(-x)=-f(x)$, για κάθε $x\in\mathrm{IR}$
2. Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη.
3. Να βρείτε τον τύπο της f.

ΑΣΚΗΣΗ 9η :

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathrm{IR}\to\mathrm{IR}$ για την οποία ισχύει:

$f(0)=1$ και $x\cdot f'(x)>0$, για κάθε $x\neq 0$

1. Δείξτε ότι η f έχει ελάχιστο το 1.
2. Αν επί πλέον ισχύει: $f'(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{f(t)}{f(t)+f(x-t)}dt$, για κάθε $x\in\mathrm{IR}$

   α) Δείξτε ότι $f(x)=\dfrac{x^2}{4}+1$, για κάθε $x\in\mathrm{IR}$

   β) Βρείτε το όριο $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^\nu}$, $\nu\in\mathrm{IN}$

ΑΣΚΗΣΗ 10η :

Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f:\mathrm{IR}\to\mathrm{IR}$ για την οποία ισχύει:

$f(x)=3x+4-\displaystyle\int_0^x\left(\int_0^y f(t)dt\right)dy$, για κάθε $x\in\mathrm{IR}$. Να αποδείξετε ότι:

1. Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο IR.
2. $f(x)=3\cdot\eta\mu x+4\cdot\sigma\upsilon\nu x$

3. Αν $x_0 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ και $\ell \in \mathbb{R}$, ώστε $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{x - x_0} = \ell$ τότε $\ell = -5$

ΑΣΚΗΣΗ 11^{η} :

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \int_x^{x+1} e^{t^2 - 2tx + 2x^2} dt \quad , \quad x \in \mathbb{R}$.

1. Δείξτε ότι: $f(x) \geq 0 \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$.
2. Δείξτε ότι: $\int_0^1 f(x)dx = f^2(0)$
3. Να βρείτε τα σημεία $x_0 \in \mathbb{R}$, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$, να περνά από την αρχή των αξόνων.
4. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $g(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt \quad , \quad x \in \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΗ 12^{η} :

Έστω μια συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με f(0)=1 και για την οποία ισχύει:

$$f(x+y) - f(x-y) = -2 \cdot ημy \cdot \int_0^x f(t)dt \quad , \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

1. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο IR.
2. $f''(x) = -f(x) \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$.
3. Η συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $\varphi(x) = (f(x) - συνx)^2 + (f'(x) + ημx)^2$ είναι σταθερή και να βρείτε την f.

ΑΣΚΗΣΗ 13^{η} :

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με f' συνεχή και f(0)=1, ώστε να ισχύει:

$\int_0^1 (f'(x))^2 dx + \int_0^1 (f(x))^2 dx = f^2(1) - 1 \quad , \quad \text{για κάθε } x \in [0,1]$. Να αποδείξετε ότι:

$f(x) = e^x \quad , \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΗ 14^{η} :

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to IR$ με $f(\beta)=2\cdot f(\alpha)$, ώστε να ισχύει:

$f'(x)=2\cdot f^2(x)-4\cdot f(x)+4 \quad , \quad \gamma\iota\alpha \ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \ x\in[\alpha,\beta]$.

Να αποδείξετε ότι:

1. $f(\alpha)>0$

2. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx<\ln 2$

3. Αν $f(\alpha)>1$ τότε :

    α) Η f είναι κυρτή

    β) Δεν υπάρχουν στη γραφική παράσταση της f τρία διαφορετικά σημεία τα οποία να είναι συνευθειακά

ΑΣΚΗΣΗ 15η :

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:IR\to IR$ με f' συνεχή στο IR και τέτοια ώστε να ισχύει :

$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cdot \eta\mu^2 x dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\cdot \sigma\upsilon\nu^2 x dx=\frac{\pi}{2}$. Να αποδείξετε ότι:

1. Υπάρχει εφαπτομένη της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία $y=2\cdot x+2003$.

2. Η εξίσωση $f(x)=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cdot \eta\mu 2t dt$ έχει λύση στο IR.

ΑΣΚΗΣΗ 16η :

Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[1,+\infty)\to IR$ με $f(1)=1$ και $f'(-1)=4$ ώστε : $x^2\cdot f''(x)=12\cdot f(x) \quad , \quad \gamma\iota\alpha \ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \ x\geq 1$.

1. Να βρείτε το φυσικό αριθμό $\nu\in IN^*$ αν ισχύει :

    $x^{\nu}\cdot f''(x)=(x^{\nu})''\cdot f(x) \quad , \quad \gamma\iota\alpha \ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \ x\geq 1$

2. Να βρείτε τη συνάρτηση f.

3. Να λύσετε στο διάστημα $[1,+\infty)$ την εξίσωση $f(x)=4^x$

ΑΣΚΗΣΗ 17η :

Έστω η συνάρτηση $f:IR\to IR$ ώστε για κάθε $x\in IR$ να ισχύουν οι σχέσεις:

$f(x)>0 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ f(x)+\ln f(x)=x$.

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
2. Να δείξετε ότι η εξίσωση f(x)=x έχει μοναδική λύση την x=1.
3. Έστω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο IR.

   α) Να εκφράσετε την f' συναρτήσει της f.

   β) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο IR.

   γ) Να δείξετε ότι: $\int_0^1 f(x)dx \le -\dfrac{f^2(0)+2f(0)-3}{2}$.

ΑΣΚΗΣΗ 18η :

Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to IR$ με $f(1)=e$ και $f'(1)=0$ και ακόμη έστω $x^3 \cdot f''(x)=e^{\frac{1}{x}}$, για κάθε $x>0$.

1. Να βρείτε τον τύπο της f.
2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
3. Να αποδείξετε ότι: $\left(\dfrac{e}{x}\right)^x \ge \dfrac{1}{e}$, για κάθε $x>0$.
4. Να αποδείξετε ότι: $f(10)+f(12)>2\cdot f(11)$

ΑΣΚΗΣΗ 19η :

Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:IR\to IR$ με $f(0)=1$ και $f'(0)=0$ ώστε $f''(x)=2\cdot x\cdot f'(x)+2\cdot f(x)$, $x\in IR$.

1. Να βρείτε την f.
2. Αν $\int_{-1}^{1} x^{2003}\cdot\left(f(x)+\alpha\cdot x^{\nu}\right)dx=2$ με $\alpha\in IR$ και $\nu\in IN^*$, να αποδείξετε ότι ο ν είναι περιττός και $\alpha\ge 2005$

ΑΣΚΗΣΗ 20η :

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:IR\to IR$ με $f(0)=3$ και $f(1)=5$ για την οποία ισχύει:

$$f'(x)=2+f(c)\cdot\int_0^x e^{t\cdot f(t)}dt \quad , \quad x\in IR \text{ και } c \text{ είναι σταθερά.}$$

1. Να βρείτε την f
2. Να βρείτε τη σταθερά c.
3. Αν για την συνάρτηση $g:IR\to IR$ ισχύει ότι $f\circ g=g\circ f$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από σταθερό σημείο, ανεξάρτητο από τον τύπο της g.