ΜΕΘΟΔΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

I) ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ:

$\int 0dx = c$	$\int 1dx = x + c$	$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ με $\alpha \neq -1$	$\int \frac{1}{x}dx = \ln\|x\| + c$
$\int e^{x}dx = e^{x} + c$	$\int \eta\mu x dx = -\sigma\upsilon\nu x + c$	$\int \sigma\upsilon\nu x dx = \eta\mu x + c$	$\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^{2}x}dx = \varepsilon\varphi x + c$
$\int \frac{1}{\eta\mu^{2}x}dx = -\sigma\varphi x + c$	$\int \alpha^{x}dx = \frac{\alpha^{x}}{\ln\alpha} + c$		

Γενίκευση:

$\int f'(x)\cdot(f(x))^{\alpha}dx = \frac{(f(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$ με $\alpha \neq -1$	
$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\|f(x)\| + c$	$\int \frac{1}{\alpha\cdot x+\beta}dx = \frac{1}{\alpha}\cdot\ln\|\alpha\cdot x+\beta\| + c$
$\int f'(x)\cdot e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + c$	$\int e^{\alpha\cdot x+\beta}dx = \frac{1}{\alpha}\cdot e^{\alpha\cdot x+\beta} + c$
$\int f'(x)\cdot\eta\mu(f(x))dx = -\sigma\upsilon\nu(f(x)) + c$	$\int \eta\mu(\alpha\cdot x+\beta)dx = -\frac{1}{\alpha}\cdot\sigma\upsilon\nu(\alpha\cdot x+\beta) + c$
$\int f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu(f(x))dx = \eta\mu(f(x)) + c$	$\int \sigma\upsilon\nu(\alpha\cdot x+\beta)dx = \frac{1}{\alpha}\cdot\eta\mu(\alpha\cdot x+\beta) + c$
$\int \frac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu^{2}f(x)}dx = \varepsilon\varphi f(x) + c$	$\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^{2}(\alpha\cdot x+\beta)}dx = \frac{1}{\alpha}\varepsilon\varphi(\alpha\cdot x+\beta) + c$
$\int \frac{f'(x)}{\eta\mu^{2}f(x)}dx = -\sigma\varphi f(x) + c$	$\int \frac{1}{\eta\mu^{2}(\alpha\cdot x+\beta)}dx = -\frac{1}{\alpha}\sigma\varphi(\alpha\cdot x+\beta) + c$
$\int f'(x)\cdot\alpha^{f(x)}dx = \frac{\alpha^{f(x)}}{\ln\alpha} + c$	$\int \alpha^{kx+\lambda}dx = \frac{1}{k}\cdot\frac{\alpha^{k\cdot x+\lambda}}{\ln\alpha} + c$

Παραδείγματα:

1. $\int x^3dx = \frac{x^4}{4} + c$

2. $\int (3\cdot x^2 + 2\cdot x + 1)\cdot(x^3 + x^2 + x + 1)^7dx = \frac{(x^3 + x^2 + x + 1)^8}{8} + c$

3. $\int (3\cdot x + 1)^7dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3\cdot x + 1)^8}{8} + c = \frac{(3\cdot x + 1)^8}{24} + c$

4. $\int \frac{2\cdot x + 1}{x^2 + x + 1}dx = \ln|x^2 + x + 1| + c = \ln(x^2 + x + 1) + c$

5. $\int \frac{1}{1 - 2\cdot x}dx = -\frac{1}{2}\cdot\ln|1 - 2\cdot x| + c$

6. $\int συνx\cdot e^{ημx}dx = e^{ημx} + c$

7. $\int e^{-3x-2}dx = -\frac{1}{3}e^{-3x-2} + c$

8. $\int e^x\cdot ημ(e^x)dx = -συν(e^x) + c$

9. $\int (2x + 1)\cdot συν(x^2 + x + \frac{π}{3})dx = ημ(x^2 + x + \frac{π}{3}) + c$

10. $\int ημ(-x + 1)dx = συν(-x + 1) + c$

11. $\int συν(-2\cdot x + 1)dx = -\frac{1}{2}ημ(-x + 1) + c$

12. $\int \frac{συνx}{συν^2(ημx)}dx = εφ(συνx) + c$

13. $\int \frac{1}{συν^2(2x)}dx = \frac{1}{2}\cdot εφ(2x) + c$

14. $\int \frac{e^x}{ημ^2(e^x)}dx = -σφ(e^x) + c$

15. $\int \frac{1}{ημ^2(-3x + 1)}dx = \frac{1}{3}\cdot σφ(-3x + 1) + c$

16. $\int συνx\cdot 2^{ημx}dx = \frac{2^{ημx}}{\ln 2} + c$

17. $\int 2^{3x+1}dx = \dfrac{2^{3x+1}}{3 \cdot \ln 2} + c$

18. $\int |x-1| \cdot dx$

Λύση:

$$\text{Αν} \quad x-1 \geq 0 \;\Rightarrow\; \int |x-1| \cdot dx = \int (x-1) \cdot dx = \frac{x^2}{2} - x + c_1$$

$$\text{Αν} \quad x-1 < 0 \;\Rightarrow\; \int |x-1| \cdot dx = -\int (x-1) \cdot dx = -(\frac{x^2}{2} - x) + c_2$$

Αφού η παράγουσα συνάρτηση στο σημείο x=1 είναι συνεχής έχουμε:

$\lim\limits_{x \to 1^-} (\frac{x^2}{2} - x + c_1) = \lim\limits_{x \to 1^+} [-(\frac{x^2}{2} - x) + c_1] \Leftrightarrow c_1 = c_2$ και άρα: $\int |x-1| \cdot dx = |\frac{x^2}{2} - x| + c_1$

II) ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΚΑΤΑ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ:

$$\int f'(x) \cdot g(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)dx$$

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες αντιμετωπίζουμε ολοκληρώματα των εξής μορφών:

$\int P(x) \cdot e^{\alpha \cdot x+\beta}dx$	$\int P(x) \cdot \eta\mu(\alpha \cdot x + \beta)dx$	$\int P(x) \cdot \sigma\upsilon\nu(\alpha \cdot x + \beta)dx$
$\int P(x) \cdot \ln(\alpha \cdot x + \beta)dx$	$\int e^{\alpha \cdot x+\beta} \cdot \eta\mu(k \cdot x + \beta)dx$	$\int e^{\alpha \cdot x+\beta} \cdot \sigma\upsilon\nu(k \cdot x + \beta)dx$
$\int P(x) \cdot e^{\alpha \cdot x+\beta} \cdot \eta\mu(k \cdot x + \beta)dx$	$\int P(x) \cdot e^{\alpha \cdot x+\beta} \cdot \sigma\upsilon\nu(k \cdot x + \beta)dx$	

όπου P(x) είναι πολυώνυμο.

Στα παραπάνω ολοκληρώματα η συνάρτηση που διαμορφώνεται σε μορφή παραγώγου (δηλ. βρίσκουμε την παράγουσά της) , κατά σειρά προτεραιότητας είναι:

$e^{\alpha \cdot x+\beta}$, $\eta\mu(\alpha \cdot x + \beta)$ ή $\sigma\upsilon\nu(\alpha \cdot x + \beta)$, $P(x)$

Για τα δύο τελευταία ολοκληρώματα υπολογίζουμε πρώτα τα $\int e^{\alpha \cdot x+\beta} \cdot \eta\mu(k \cdot x + \beta)dx$ και $\int e^{\alpha \cdot x+\beta} \cdot \sigma\upsilon\nu(k \cdot x + \beta)dx$ και εργαζόμαστε όπως στα παρακάτω παραδείγματα.

Παραδείγματα:

1. $I=\int (x^2+x+1)\cdot e^{3x+1}dx$

Λύση:

$$I=\frac{1}{3}\cdot\int (x^2+x+1)\cdot(e^{3x+1})'\,dx=\frac{1}{3}(x^2+x+1)\cdot(e^{3x+1})-\frac{1}{3}\cdot\int (2x+1)\cdot(e^{3x+1})dx=$$

$$=\frac{1}{3}(x^2+x+1)\cdot(e^{3x+1})-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\int (2x+1)\cdot(e^{3x+1})'dx=$$

$$=\frac{1}{3}(x^2+x+1)\cdot(e^{3x+1})-\frac{1}{9}\cdot[\int (2x+1)\cdot(e^{3x+1})-\int 2\cdot e^{3x+1}dx]=$$

$$=\frac{1}{3}(x^2+x+1)\cdot(e^{3x+1})-\frac{1}{9}\cdot\int (2x+1)\cdot(e^{3x+1})+\frac{2}{9}\cdot\int e^{3x+1}dx=$$

$$=\frac{1}{3}(x^2+x+1)\cdot(e^{3x+1})-\frac{1}{9}\cdot\int (2x+1)\cdot(e^{3x+1})+\frac{2}{27}e^{3x+1}+c$$

$$=\frac{e^{3x+1}}{27}\cdot(9x^2+3x+8)+c$$

2. $I=\int (x^2+x+1)\cdot ημ(3x+1)dx$

Λύση:

$$I=-\frac{1}{3}\cdot\int (x^2+x+1)\cdot(συν(3x+1))'\,dx=-\frac{1}{3}(x^2+x+1)\cdot συν(3x+1)+\frac{1}{3}\cdot\int (2x+1)\cdot συν(3x+1)dx=$$

$$=-\frac{1}{3}(x^2+x+1)\cdot(e^{3x+1})+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\int (2x+1)\cdot(ημ(3x+1))'dx=$$

$$=-\frac{1}{3}(x^2+x+1)\cdot συν(3x+1)+\frac{1}{9}\cdot[(2x+1)\cdot ημ(3x+1)-\int 2\cdot ημ(3x+1)dx]=$$

$$=-\frac{1}{3}(x^2+x+1)\cdot συν(3x+1)+\frac{1}{9}\cdot(2x+1)\cdot ημ(3x+1)-\frac{2}{9}\cdot\int ημ(3x+1)dx=$$

$$=-\frac{1}{3}(x^2+x+1)\cdot συν(3x+1)+\frac{1}{9}\cdot(2x+1)\cdot ημ(3x+1)+\frac{2}{27}\cdot συν(3x+1)+c$$

3. $I=\int (3x^2+2x+1)\cdot \ln(3x)dx$

Λύση:

$$I=\int (x^3+x^2+x)'\cdot\ln(3x)dx=(x^3+x^2+x)\cdot\ln(3x)-\int (x^3+x^2+x)\cdot\frac{1}{x}dx=$$

$$=(x^3+x^2+x)\cdot\ln(3x)-\int (x^2+x+1)dx=(x^3+x^2+x)\cdot\ln(3x)-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-x+c$$

4. $I=\int e^{2x}\cdot ημ(3x+1)dx$

Λύση:

$$I=\frac{1}{2}\cdot\int(e^{2x})'\cdot ημ(3x+1)dx=\frac{1}{2}\cdot[e^{2x}\cdot ημ(3x+1)-3\cdot\int e^{2x}συν(3x+1)dx]=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot e^{2x}\cdot ημ(3x+1)-\frac{3}{4}\cdot\int(e^{2x})'\cdot συν(3x+1)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot e^{2x}\cdot ημ(3x+1)-\frac{3}{4}\cdot[e^{2x}\cdot συν(3x+1)+3\int e^{2x}\cdot ημ(3x+1)dx]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow I+c_1=\frac{1}{2}\cdot e^{2x}\cdot ημ(3x+1)-\frac{3}{4}\cdot e^{2x}\cdot συν(3x+1)-\frac{9}{4}\cdot I+c_2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{13}{4}I=\frac{1}{2}\cdot e^{2x}\cdot ημ(3x+1)-\frac{3}{4}\cdot e^{2x}\cdot συν(3x+1)+c_2-c_1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow I=\frac{4}{13}\cdot(\frac{1}{2}\cdot e^{2x}\cdot ημ(3x+1)-\frac{3}{4}\cdot e^{2x}\cdot συν(3x+1))+c=e^{2x}\cdot(\frac{2}{13}\cdot ημ(3x+1)-\frac{3}{13}\cdot συν(3x+1))+c$$

5. $I=\int x\cdot e^{x}\cdot ημx dx$

Λύση:

Πρώτα υπολογίζουμε το

$\int e^{x}ημx dx=...=\frac{1}{2}(e^{x}ημx-e^{x}συνx)+c\Rightarrow\frac{1}{2}(e^{x}ημx-e^{x}συνx)'=e^{x}\cdot ημx$. Έτσι έχουμε:

$$I=\int x\cdot\frac{1}{2}\cdot(e^{x}\cdot ημx-e^{x}συνx)'dx=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot x\cdot(e^{x}\cdot ημx-e^{x}συνx)-\frac{1}{2}\cdot\int(e^{x}\cdot ημx-e^{x}\cdot συνx)dx=\frac{1}{2}\cdot x\cdot(e^{x}\cdot ημx-e^{x}συνx)+\frac{1}{2}\cdot e^{x}\cdot συνx+c$$

Σχόλιο: Στον τύπο ολοκλήρωσης κατά παράγοντες $\int f'(x)\cdot g(x)dx=f(x)\cdot g(x)-\int f(x)\cdot g'(x)dx$ η συνάρτηση f υπολογίζεται όπως στο παρακάτω παράδειγμα:

6. $I=\int x\cdot\sqrt{x+1}dx$

$f'(x)=\sqrt{x+1}\Rightarrow f(x)=\int\sqrt{x+1}dx=...=\frac{2}{3}\cdot(x+1)^{\frac{3}{2}}$. Έτσι $I=\int x\cdot[\frac{2}{3}\cdot(x+1)^{\frac{3}{2}}]'dx=...=$

$$=\frac{2}{3}\cdot x\cdot(x+1)^{\frac{3}{2}}-\frac{4}{5}\cdot(x+1)^{\frac{5}{2}}+c$$

7. $I=\int\frac{x\cdot e^{x}}{(1+x)^2}dx$

Λύση:

$$I=\int\frac{x\cdot e^{x}}{(1+x)^2}dx=\int x\cdot e^{x}(-\frac{1}{x+1})'dx=-\frac{x\cdot e^{x}}{x+1}+\int\frac{1}{x+1}\cdot(x\cdot e^{x})'dx=...=-\frac{x\cdot e^{x}}{x+1}+e^{x}+c$$

8. $I=\int\frac{x\cdot dx}{συν^2x}$

Λύση:

$$I=\int x\cdot(\varepsilon\varphi x)'dx=\ldots=x\cdot\varepsilon\varphi x+\ln|\sigma\upsilon\nu x|+c$$

9. $I=\int \eta\mu(\ln x)dx$

Λύση:

$$I=\int[\eta\mu(\ln x)]\cdot(x)'dx=\ldots=x\cdot[\eta\mu(\ln x)-\sigma\upsilon\nu(\ln x)]-I\;\Rightarrow I=\frac{1}{2}\cdot x\cdot[\eta\mu(\ln x)-\sigma\upsilon\nu(\ln x)]+c$$

10. $I=\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})dx$

Λύση:

Όπως η προηγούμενη άσκηση

11. $I=\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})\cdot dx$

Λύση:

$$I=\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})\cdot dx=\int (x)'\cdot\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})\cdot dx=\ldots$$

III) ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ:

Αν P(x) , Q(x) είναι ακέραια πολυώνυμα του x , τότε:

$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$	Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος του βαθμού του παρονομαστή, αναλύουμε το κλάσμα σε άθροισμα απλών κλασμάτων δηλ. προσδιορίζουμε πραγματικούς αριθμούς Α , Β , Γ , … ώστε $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{(x-\rho_1)}+\frac{B}{(x-\rho_2)}+\frac{\Gamma}{(x-\rho_3)}+\ldots$ όπου ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 , … είναι οι ρίζες του παρονομαστή. Αν οι ρίζες εμφανίζονται με πολλαπλότητα μεγαλύτερη του 1 π.χ 3, τότε για κάθε τέτοια ρίζα θεωρούμε όλα τα κλάσματα της μορφής : $\frac{A}{(x-\rho_1)}+\frac{B}{(x-\rho_1)^2}+\frac{\Gamma}{(x-\rho_1)^3}$ Αν ο παρονομαστής έχει δευτεροβάθμιους παράγοντες (που δεν παραγοντοποιούνται), θεωρούμε για τους παράγοντες αυτούς κλάσματα της μορφής: $\frac{Ax+B}{(\delta\varepsilon\upsilon\tau\varepsilon\rho o\beta\acute{\alpha}\theta\mu\iota o\varsigma\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\gamma o\nu\tau\alpha\varsigma)}$
$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx$	Αν ο βαθμός του αριθμητή είναι μεγαλύτερος ή ίσος του βαθμού του παρονομαστή, εκτελούμε πρώτα την διαίρεση και στην συνέχεια αναγόμαστε στην προηγούμενη περίπτωση.

Παραδείγματα:

1. $$I=\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4\cdot x}dx$$

Λύση:

$$\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4\cdot x}=x^2+x+4+\frac{4x^2+16x-8}{x^3-4x} \quad , \quad \frac{4x^2+16x-8}{x\cdot(x-2)\cdot(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{\Gamma}{\chi+2}\Rightarrow \dots$$

$$\dots\Rightarrow A=2\,,B=5\,,\Gamma=-3$$

Έτσι:

$$I=\int\frac{x^5+x^4-8}{x^3-4\cdot x}dx=\int(x^2+x+4)dx+2\cdot\int\frac{1}{x}dx+5\cdot\int\frac{1}{x-2}dx-3\cdot\int\frac{1}{x+2}dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+2\cdot\ln|x|+5\cdot\ln|x-2|-3\cdot\ln|x+2|+c$$

2. $$I=\int\frac{x}{(x-1)^4\cdot(x+1)}\cdot dx$$

Λύση:

$$\frac{x}{(x-1)^4\cdot(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{\Gamma}{(x-1)^3}+\frac{\Delta}{(x-1)^4}+\frac{E}{x+1}\Leftrightarrow A=\frac{1}{16}\ ,\ B=\frac{-1}{8}\ ,\ \Gamma=\frac{1}{4}\ ,\ \Delta=\frac{1}{2}\ ,\ E=\frac{-1}{16}$$

$$I=\int\frac{x}{(x-1)^4\cdot(x+1)}\cdot dx=\dots=\frac{1}{16}\cdot\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\frac{1}{8\cdot(x-1)}-\frac{1}{8\cdot(x-1)^2}-\frac{1}{6\cdot(x-1)^3}+c$$

3. $$I=\int\frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}\cdot dx$$

Λύση:

$$\frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}=\frac{Ax+B}{(x^2+1)^2}+\frac{\Gamma x+\Delta}{x^2+1}\Rightarrow\dots\Rightarrow\Gamma=1\ ,\ \Delta=0\ ,\ B=0\ ,\ A=-3$$

$$I=\int\frac{x^3-2x}{(x^2+1)^2}\cdot dx=\dots=\frac{3}{2\cdot(x^2+1)}+\frac{1}{2}\cdot\ln(x^2+1)+c$$

IV) ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΜΕ ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ:

$$\int f(g(x))\cdot g'(x)dx=\int f(u)du \quad \text{με} \quad u=g(x) \quad \text{και } du=g'(x)dx$$

Παραδείγματα:

1. $$I=\int x^2\cdot\sqrt{x^3+5}\cdot dx$$

Λύση:

$$I=\int x^2\cdot\sqrt{x^3+5}\cdot dx \overset{\sqrt{x^3+5}=t}{=} \int t\cdot\frac{2}{3}t\cdot dt=\frac{2}{3}\cdot\int t^2\cdot dt=\frac{2}{9}\cdot t^3+c=\frac{2}{9}\cdot(\sqrt{x^3+5})^3+c$$

2. $$I=\int\frac{(2\cdot\ln x+3)^3}{x}\cdot dx$$

Λύση:

$$I=\int\frac{(2\cdot\ln x+3)^3}{x}\cdot dx \overset{2\cdot\ln x+3=t}{=} \frac{1}{2}\cdot\int t^3\cdot dt=\frac{1}{8}\cdot t^4+c=\frac{1}{8}\cdot(2\cdot\ln x+3)^4+c$$

3. $$I=\int\frac{x}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x-1}}\cdot dx$$

Λύση:

$$I=\int\frac{x}{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}\cdot dx \overset{\sqrt[6]{x+1}=t}{=} \int\frac{(t^6-1)\cdot 6\cdot t^5}{t^3-t^2}\cdot dt=\int(t^8+t^7+t^6+t^5+t^4+t^3)\cdot dt=\ldots$$

4. $$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}+1}$$

Λύση:

Θέτουμε $\sqrt{x}=t\Rightarrow x=t^2\Rightarrow dx=2\cdot t\cdot dt$ και έτσι έχουμε:

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}+1}=\int\frac{2\cdot t\cdot dt}{t+\sqrt{t^2-1}+1} \overset{\sqrt{t^2+1}=t+z}{=} \int(\frac{1}{2}\cdot z-\frac{1}{2}+\frac{1}{2z}-\frac{1}{2z^2})dz=\ldots$$

5. $$I=\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{6+x-x^2}}$$

Λύση:

Επειδή $6+x-x^2=(3-x)(x+2)$ θέτουμε: $(3-x)(x+2)=(3-x)^2\cdot u^2\Rightarrow u^2=\frac{x+2}{3-x}$

και $x=\frac{3u^2-2}{u^2+1}\Rightarrow dx=\frac{10\cdot u\cdot du}{(u^2+1)^2}$. Ακόμη

$$\sqrt{6+x-x^2}=\sqrt{6+\frac{3u^2-2}{u^2+1}-\frac{(3u^2-2)^2}{(u^2+1)^2}}=\frac{5u}{u^2+1}$$ Έτσι:

$$I=\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{6+x-x^2}}=\int\frac{2}{3u^2-2}\cdot du=\text{ανάλυση κλάσματος σε άθροισμα απλών κλασμάτων}\ldots$$

6. $$I=\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}dx$$

Λύση:

$x^2 + 3x + 2 = (x+1)\cdot(x+2)$ έτσι θέτουμε $x^2 + 3x + 2 = u^2 \cdot (x+1)^2 \Rightarrow \dots$

$$\Rightarrow x = \frac{2 - u^2}{u^2 - 1} \Rightarrow dx = \frac{2\cdot u\cdot du}{(u^2-1)^2}$$

$$x - \sqrt{x^2+3x+2} = \dots\frac{2 - u^2 - u}{u^2 - 1} \quad \text{και} \quad x + \sqrt{x^2+3x+2} = \dots\frac{2 - u^2 + u}{u^2 - 1}$$

$$I = \int \frac{x - \sqrt{x^2+3x+2}}{x + \sqrt{x^2+3x+2}}dx = \int \frac{-2\cdot u^2 - 4\cdot u}{(u-2)\cdot(u-1)\cdot(u+1)^3}du = \text{ανάλυση κλάσματος}\dots$$

Σχόλιο : Ολοκληρώματα της μορφής $\int f(e^{\alpha x})\cdot dx$ υπολογίζονται με την αντικατάσταση $e^{\alpha x} = u$

7. $I = \int \frac{e^{2x} + 4\cdot e^x}{e^{2x} - e^x - 2}\cdot dx$

Λύση:

Θέτουμε $e^x = u \Rightarrow du = e^x \cdot dx$ και άρα

$$I = \int \frac{e^{2x} + 4\cdot e^x}{e^{2x} - e^x - 2}\cdot dx = \int \frac{u^2 + 4u}{u^2 - u - 2}\cdot\frac{du}{u} = \int \frac{u+4}{(u+1)(u-2)}\cdot du = \text{ανάλυση κλάσματος}\dots$$

8. $I = \int \frac{e^{2\cdot x} - 1}{e^{2\cdot x} + 3}\cdot dx$

Λύση:

Θέτουμε $e^{2\cdot x} = u \Rightarrow dx = \frac{du}{2\cdot u}$. Έτσι το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$I = \int \frac{e^{2\cdot x} - 1}{e^{2\cdot x} + 3}\cdot dx = \frac{1}{2}\cdot\int \frac{u-1}{u\cdot(u+3)}\cdot du = \frac{1}{2}\cdot\int\left(\frac{A}{u} + \frac{B}{u+3}\right)\cdot du = \dots$$

Σχόλιο : Ολοκληρώματα της μορφής $\int f(x, \sqrt{\alpha x + \beta}, \sqrt{\gamma x + \delta})\cdot dx$ αντιμετωπίζονται με την

αντικατάσταση $\sqrt{\alpha x + \beta} = t \Rightarrow x = \frac{t^2 - \beta}{\alpha}$

9. $I = \int \frac{x\cdot dx}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}}$

10. $I = \int \frac{x + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}\cdot dx$

V) ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ:

1. Ολοκληρώματα της μορφής $\int f(\eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x)\cdot dx \quad , \quad f = \text{ρητή συνάρτηση των } \eta\mu x, \sigma\upsilon\nu x$

Εκφράζουμε τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, συναρτήσει της $\varepsilon\varphi\frac{x}{2}$ με τους τύπους:

$$\eta\mu x = \frac{2\cdot\varepsilon\varphi\frac{x}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}} \quad , \quad \sigma\upsilon\nu x = \frac{1-\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}}{1+\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}} \quad \text{και θέτουμε} \quad \varepsilon\varphi\frac{x}{2} = u \Rightarrow \frac{1}{2\cdot\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}}dx = du \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}+1}{2}dx = du \Rightarrow dx = \frac{2}{u^2+1}\cdot du$$

Αν η f είναι περιττή ως προς ημx τότε θέτουμε: συνx=u , αν είναι περιττή ως προς συνx, θέτουμε ημx=u, ενώ αν είναι άρτια ως προς ημx και συνx τότε θέτουμε εφx=u

Παραδείγματα:

- ✓ $I = \int\frac{1+\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}\cdot dx = \ldots = \varepsilon\varphi\frac{x}{2} + \ln(\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}+1) + c$
- ✓ $I = \int\frac{dx}{\eta\mu x} = \ldots = \ln|\varepsilon\varphi\frac{x}{2}| + c$
- ✓ $I = \int\sigma\upsilon\nu^5 x\cdot dx \overset{\pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{\eta}}{=} \int\sigma\upsilon\nu^4 x\cdot\sigma\upsilon\nu x\cdot dx \overset{\eta\mu x = u}{=} \ldots = \eta\mu x - \frac{2}{3}\eta\mu^3 x + \frac{1}{5}\cdot\eta\mu^5 x + c$
- ✓ $I = \int\frac{dx}{4\cdot\eta\mu x + 3\cdot\sigma\upsilon\nu x + 5} = \ldots = -\frac{1}{\varepsilon\varphi\frac{x}{2}+2} + c$

2. Ολοκληρώματα της μορφής $\int\eta\mu^m x\cdot\sigma\upsilon\nu^n x dx \quad , \quad m,n\in Z^*$

- ✓ Αν m , n είναι φυσικοί αριθμοί και ένας τουλάχιστον περιττός, π.χ m=2κ+1 τότε δουλεύουμε ως εξής:

$$\int\eta\mu^m x\cdot\sigma\upsilon\nu^n x dx = \int\eta\mu^{2\kappa}x\cdot\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu^n x dx = -\int(\eta\mu^2 x)^\kappa\cdot(\sigma\upsilon\nu x)'\cdot\sigma\upsilon\nu^n x dx =$$

$$= -\int(1-\sigma\upsilon\nu^2 x)^\kappa\cdot\sigma\upsilon\nu^n x d(\sigma\upsilon\nu x)$$

Στην συνέχεια αναπτύσσουμε το $(1-\sigma\upsilon\nu^2 x)^\kappa$ και χωρίζουμε σε άθροισμα ολοκληρωμάτων

- ✓ Αν m , n είναι φυσικοί αριθμοί άρτιοι τότε χρησιμοποιούμε τους τύπους (αποτετραγωνισμού): $\eta\mu^2\alpha = \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2} \quad , \quad \sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2} \quad , \quad \eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{\eta\mu 2\alpha}{2}$

Π.χ.

$$\int συν^2 3x \cdot ημ^4 3x dx = \int (συν^2 3x \cdot ημ^2 3x)^2 \cdot ημ^2 3x dx = \int \frac{ημ^2 6x}{4} \cdot \frac{1-συν6x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \int (ημ^2 6x - ημ^2 6x \cdot συν6x) dx = \frac{1}{8} \cdot \int (\frac{1-συν12x}{2} - ημ^2 6x \cdot συν6x) dx =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot [\int \frac{dx}{2} - \int \frac{συν12x}{2} dx - \frac{1}{6} \cdot \int ημ^2 6x \cdot d(ημ6x)] = \frac{1}{8} \cdot [\frac{x}{2} - \frac{1}{24} \cdot ημ12x - \frac{1}{18} \cdot ημ^3 6x] + c$$

- ✓ Αν m , n είναι αρνητικοί και συγχρόνως άρτιοι ή περιττοί και οι δύο τότε εργαζόμαστε όπως στο επόμενο παράδειγμα:

$$\int ημ^{-2}x \cdot συν^{-4}x dx = \int \frac{1}{ημ^2 x} \cdot \frac{1}{συν^4 x} dx = \int \frac{1+εφ^2 x}{εφ^2 x} \cdot (1+εφ^2 x) \cdot \frac{1}{συν^2 x} dx \overset{u=εφx\, ,\, du=\frac{1}{συν^2 x}dx}{=}$$

$$= \int \frac{1+u^2}{u^2} \cdot (1+u^2) \cdot du = \int (\frac{1}{u^2} + 1)(1+u^2) \cdot du = \int (\frac{1}{u^2} + 2 + u^2) \cdot du = -\frac{1}{u} + 2u + \frac{u^3}{3} + c =$$

$$= -\frac{1}{εφx} + 2 \cdot εφx + \frac{εφ^3 x}{3} + c$$

- ✓ Αν ο m είναι περιττός τότε κάνουμε την αντικατάσταση : $συνx = t$
- ✓ Αν ο n είναι περιττός τότε κάνουμε την αντικατάσταση : $ημx = t$
- ✓ Αν ο m+n είναι άρτιος τότε κάνουμε την αντικατάσταση : $εφx = t$ ή $συνx = t$

Παραδείγματα:

$$I = \int \frac{ημ^3 x}{\sqrt[3]{συν^2 x}} dx \overset{συνx=t}{=} \int \frac{(1-συν^2 x) \cdot ημx}{\sqrt[3]{συν^2 x}} dx = \int (1-t^2) \cdot t^{\frac{2}{3}} \cdot dt = -3t^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{7} \cdot t^{\frac{7}{3}} + c = ...$$

$$I = \int \frac{ημ^2 x}{συν^6 x} dx \overset{εφx=t}{=} \int ημ^2 x \cdot συν^{-4} x \cdot \frac{1}{συν^2 x} \cdot dx = \int \frac{ημ^2 x}{συν^2 x} \cdot \frac{1}{συν^2 x} \cdot \frac{1}{συν^2 x} \cdot dx =$$

$$= \int t^2 \cdot (1+t^2) \cdot dt = ...$$

διότι :

$$εφx = t \Rightarrow t = \frac{\sqrt{1 - συν^2 x}}{συνx} \Rightarrow t^2 = \frac{1-συν^2 x}{συν^2 x} \Rightarrow \frac{1}{συν^2 x} = t^2 + 1$$

$$dt = \frac{1}{συν^2 x} dx$$

3. Ολοκληρώματα της μορφής $\int ημ^m x dx$, $m = αρνητικός\ ακέραιος$

Εφαρμόζουμε τον τύπο του διπλάσιου τόξου και μετά αναγόμαστε στην προηγούμενη περίπτωση

4. Ολοκληρώματα της μορφής $\int συν^{n}x dx$, $n =$ αρνητικός ακέραιος

Επειδή $συνx = ημ(x+\frac{π}{2})$ μπορούμε να αναχθούμε στην προηγούμενη περίπτωση.

5. Ολοκληρώματα της μορφής $\int εφ^{ν}x dx$, $ν \in IN^{*}$

Κάνουμε την αντικατάσταση:

$$εφx = t \text{ και έχουμε } dt = \frac{1}{συν^2x}dx = (εφ^2x+1)\cdot dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{t^2+1}$$

Παραδείγματα:

$$I = \int ημ^{-3}x dx = \int \frac{1}{ημ^3x}dx = \int \frac{1}{(2\cdot ημ\frac{x}{2}\cdot συν\frac{x}{2})^3}\cdot dx = \frac{1}{8}\cdot\int\frac{1}{ημ^3\frac{x}{2}\cdot συν^3\frac{x}{2}}\cdot dx =$$

✓

$$= \frac{1}{8}\cdot\int(\frac{1}{ημ\frac{x}{2}})^3\cdot(\frac{1}{συν\frac{x}{2}})^3 dx = \frac{2}{8}\cdot\int[1+\frac{1}{εφ^2\frac{x}{2}}]^{\frac{3}{2}}\cdot[1+εφ^2\frac{x}{2}]\cdot d(εφ\frac{x}{2}) \overset{εφ\frac{x}{2}=t}{=} \ldots$$

$$J = \int συν^{-1}x dx = \int\frac{1}{συνx}dx = \int\frac{1}{ημ(x+\frac{π}{2})}dx = \int\frac{dx}{2\cdot ημ(\frac{x}{2}+\frac{π}{4})\cdot συν(\frac{x}{2}+\frac{π}{4})} =$$

✓

$$= \frac{1}{2}\cdot\int\frac{συν(\frac{x}{2}+\frac{π}{4})}{ημ(\frac{x}{2}+\frac{π}{4})}\cdot\frac{1}{συν^2(\frac{x}{2}+\frac{π}{4})}dx = \frac{2}{2}\cdot\int\frac{1}{εφ(\frac{x}{2}+\frac{π}{4})}\cdot dεφ(\frac{x}{2}+\frac{π}{4}) = \ln|εφ(\frac{x}{2}+\frac{π}{4})|+c$$

$$Q = \int εφ^4x dx = \int εφ^2x\cdot εφ^2x\cdot dx = \int εφ^2x\cdot(\frac{1}{συν^2x}-1)\cdot dx = -\int εφ^2x dx + \int εφ^2x\cdot\frac{1}{συν^2x}\cdot dx =$$

✓

$$= \int εφ^2x\cdot(εφx)'\cdot dx - \int εφ^2x dx = \frac{εφ^3x}{3} - \int(\frac{1}{συν^2x}-1)dx = \frac{εφ^3x}{3} - \int\frac{1}{συν^2x}dx - \int 1\cdot dx =$$

$$= \frac{εφ^3x}{3} - εφx + x + c$$

ή με άλλο τρόπο :

✓ $$Q = \int εφ^4x dx \overset{εφx=t,\, dx=\frac{1}{1+t^2}dt}{=} \int t^4\cdot\frac{1}{1+t^2}dt = \int\frac{t^4}{1+t^2}dt = \ldots$$

VI) ΑΝΑΓΩΓΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ:

1. Να βρείτε αναγωγικό τύπο για το ολοκλήρωμα $I_\nu = \int \sigma\upsilon\nu^\nu x dx \quad , \quad \nu \in IN^*$ και μετά να υπολογίσετε το $I_4 = \int \sigma\upsilon\nu^4 x dx$

Λύση :

$$I_\nu = \int \sigma\upsilon\nu^\nu x \cdot dx = \int \sigma\upsilon\nu^{\nu-1} x \cdot \sigma\upsilon\nu x \cdot dx = \int \sigma\upsilon\nu^{\nu-1} x \cdot (\eta\mu x)' \cdot dx = \ldots =$$

$$= \sigma\upsilon\nu^{\nu-1} x \cdot (\eta\mu x) + (\nu-1) \cdot \int \sigma\upsilon\nu^{\nu-2} x \cdot dx - (\nu-1) \cdot I_\nu \Rightarrow \ldots \Rightarrow I_\nu = \frac{\sigma\upsilon\nu^{\nu-1} x \cdot \eta\mu x}{\nu} + \frac{\nu-1}{\nu} \cdot I_{\nu-2}$$

2. Να βρείτε αναγωγικό τύπο για το ολοκλήρωμα $I_\nu = \int x^\nu \cdot e^{-x} \cdot dx \quad , \quad \nu \in IN^*$

Λύση :

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες βρίσκουμε ότι: $I_\nu = \int x^\nu \cdot e^{-x} \cdot dx = -x^\nu \cdot e^{-x} + \nu \cdot I_{\nu-1}$

3. Να βρείτε αναγωγικό τύπο για το ολοκλήρωμα $I_\nu = \int (\ln x)^\nu \cdot dx \quad , \quad \nu \in IN^*$

Λύση :

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες βρίσκουμε ότι: $I_\nu = \int (\ln x)^\nu \cdot dx = x \cdot (\ln x)^\nu - \nu \cdot I_{\nu-1}$

4. Να βρείτε αναγωγικό τύπο για το ολοκλήρωμα $I_\nu = \int \varepsilon\varphi^\nu x dx \quad , \quad \nu \in IN^*$ και μετά να υπολογίσετε το $I_3 = \int \varepsilon\varphi^3 x dx$

Λύση :

$$I_\nu = \int \varepsilon\varphi^\nu x dx = \int \varepsilon\varphi^{\nu-2} x \cdot \varepsilon\varphi^2 x \cdot dx = \int \varepsilon\varphi^{\nu-2} x \cdot [1 + \varepsilon\varphi^2 x - 1] \cdot dx =$$

$$= \int \varepsilon\varphi^{\nu-2} x \cdot (1 + \varepsilon\varphi^2 x) \cdot dx - \int \varepsilon\varphi^{\nu-2} x dx = \int \varepsilon\varphi^{\nu-2} x \cdot (\varepsilon\varphi x)' \cdot dx - \int \varepsilon\varphi^{\nu-2} x dx = \ldots = \frac{\varepsilon\varphi^{\nu-1} x}{\nu-1} - I_{\nu-2}$$

$$I_3 = \frac{\varepsilon\varphi^2 x}{2} - I_1 = \frac{\varepsilon\varphi^2 x}{2} - \int \varepsilon\varphi x dx = \frac{\varepsilon\varphi^2 x}{2} - \int \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} dx = \frac{\varepsilon\varphi^2 x}{2} + \int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} \cdot d(\sigma\upsilon\nu x) = \frac{\varepsilon\varphi^2 x}{2} + \ln|\sigma\upsilon\nu x| + c$$

5. Να βρείτε αναγωγικό τύπο για τα ολοκληρώματα:

$$I_\nu = \int x^\nu \cdot \eta\mu(\alpha x) dx \quad \kappa\alpha\iota \quad J_\nu = \int x^\nu \cdot \sigma\upsilon\nu(\alpha x) dx$$

Λύση :

$$I_\nu = -\frac{1}{\alpha} \int x^\nu \cdot (\sigma\upsilon\nu(\alpha x))' dx = \ldots = -\frac{1}{\alpha} \cdot x^\nu \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha x + \frac{\nu}{\alpha^2} \cdot x^{\nu-1} \cdot \eta\mu\alpha x - \frac{\nu(\nu-1)}{\alpha^2} \cdot I_{\nu-2}$$

$$J_\nu = \frac{1}{\alpha} \cdot x^\nu \cdot \eta\mu\alpha x + \frac{\nu}{\alpha^2} \cdot x^{\nu-1} \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha x - \frac{\nu(\nu-1)}{\alpha^2} \cdot J_{\nu-2}$$

6. Να βρείτε αναγωγικό τύπο για το ολοκλήρωμα: $I_\nu = \int \frac{x^\nu}{1 - x^2} \cdot dx$

Λύση :

Θέτουμε $x = εφu \Rightarrow dx = \frac{1}{συν^2 u} \cdot du = (1 + εφ^2 u) \cdot du$

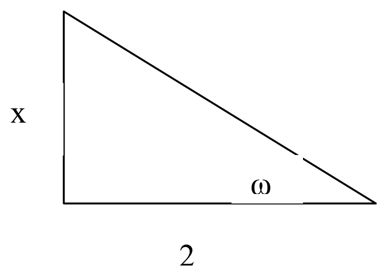
$I_\nu = \int \frac{x^\nu}{1+x^2} \cdot dx = \int \frac{εφ^\nu u}{1+εφ^2 u} \cdot (1+εφ^2 u) \cdot du = \int εφ^\nu u \cdot du \quad (\text{άσκηση } 4)$. Τελικά $I_\nu = \frac{1}{\nu - 1} \cdot x^{\nu-1} - I_{\nu-2}$

VI) ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΤΗΣ ΜΟΡΦΗΣ $\int f(x, \sqrt{\alpha^2 \pm \beta^2 x^2}) dx$:

Για να ανακαλύψουμε τον κατάλληλο μετασχηματισμό θεωρούμε τους δύο προσθετέους της υπόρριζης ποσότητας σαν δύο πλευρές ορθογωνίου τριγώνου (η επιλογή γίνεται με βάση το Πυθαγόρειο θεώρημα) και εκφράζουμε την πλευρά που αναφέρεται στην μεταβλητή x συναρτήσει της άλλης πλευράς και του ημιτόνου ή του συνημιτόνου ή της εφαπτομένης μιας οξείας γωνίας του ορθογωνίου τριγώνου.

Παραδείγματα:

1. $I = \int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{x^2 + 4}}$



$$I = \int \frac{dx}{x^2 \cdot \sqrt{x^2+4}} = \int \frac{\frac{2 \cdot dω}{συν^2 ω}}{4 \cdot εφ^2 ω \cdot \frac{2}{συνω}}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \int \frac{συνω}{ημ^2 ω} \cdot dω = \frac{1}{4} \cdot \int ημ^{-2} ω \cdot d(ημω) =$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{ημω} + c$$

$x = 2 \cdot εφω \Rightarrow \sqrt{x^2 + 4} = \frac{2}{συνω}$ και

$dx = \frac{2}{συν^2 ω} \cdot dω$

2. $I=\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\cdot dx$

$$I=\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\cdot dx=\int \frac{2\cdot συνω}{2\cdot ημω}.2\cdot συνω\cdot dω=$$

$$=2\cdot\int \frac{συν^2ω}{ημω}\cdot dω=2\cdot\int \frac{1-ημ^2ω}{ημω}\cdot dω=$$

$$=2\cdot\int \frac{1}{ημω}dω-2\cdot\int ημω\cdot dω=$$

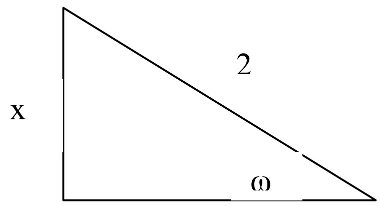
$$=2\cdot\int \frac{1}{2\cdot ημ\frac{ω}{2}\cdot συν\frac{ω}{2}}\cdot dω+2\cdot συνω=$$

$$=2\cdot\int \frac{συν\frac{ω}{2}}{2\cdot ημ\frac{ω}{2}\cdot συν^2\frac{ω}{2}}\cdot dω+2\cdot συνω=$$

$$=2\cdot\int \frac{1}{2\cdot εφ\frac{ω}{2}\cdot συν^2\frac{ω}{2}}\cdot dω+2\cdot συνω=$$

$$=2\cdot\int \frac{d(εφ\frac{ω}{2})}{εφ\frac{ω}{2}}+2\cdot συνω=2\cdot \ln|εφ\frac{ω}{2}|+2\cdot συνω+c=$$

$$=2\cdot \ln\left|\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}\right|+\sqrt{4-x^2}+c$$



$x=2\cdot ημω\Rightarrow\sqrt{4-x^2}=2\cdot συνω$ και

$dx=2\cdot συνω\cdot dω$

ακόμη

$$ημω=\frac{x}{2}\Rightarrow συνω=\sqrt{1-\frac{x^2}{2^2}}=\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}$$

$$εφ\frac{ω}{2}=\frac{1-συνω}{ημω}=\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}$$