

# Μιγαδικοί Αριθμοί

## ( ασκήσεις )

- Έστω  $z \in \mathbb{C}$  τέτοιος ώστε  $|z+3|=2|z-3|$ 
  - Να βρείτε το γ.τ της εικόνας του  $z$ .
  - Να βρείτε το γ.τ της εικόνας του  $w = \frac{z-9}{z-5}$
- Έστω ότι για τους μιγαδικούς αριθμούς  $z_1, z_2$  ισχύει:  
 $|z_1|^2(3i+4) + 5iz_1^2 = 0$  και  $|z_2|^2(4+3i) + 5iz_2^2 = 0$ .
  - Δείξτε ότι:  $|z_1 + z_2|^2(4+3i) + 5i(z_1 + z_2)^2 = 0$
  - Βρείτε το γ.τ της εικόνας του  $w$ , αν  $w = \frac{1}{z_1} + 1$
- Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός  $z=3+2\sigma\eta\theta+4i\eta\mu\theta$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ .
  - Να βρείτε το γ.τ της εικόνας του  $z$ .
  - Να προσδιορίσετε το  $p$ , ώστε η παραβολή  $c: y^2=2px$  να εφάπτεται στον παραπάνω γ.τ.
- Να βρεθεί ο μιγαδικός  $z=x+yi$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ , αν ισχύουν  $|z+3i|=|z-i|$  και  $\text{Arg}(2z+3i)=2\pi/3$
- Αν  $\Pi(x)=x^2+2|z_1-z_2|x+(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)$  με  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , δείξτε ότι  $\Pi(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Πότε ισχύει η ισότητα και για ποια τιμή του  $x$ ;

6. Να βρείτε το γ. των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z$  για τους οποίους ισχύει:  $\left| \frac{z}{z-1} \right| = \frac{1}{2}$
7. Να βρείτε το σύνολο των σημείων του μιγαδικού επιπέδου για τα οποία είναι:  $\frac{|z-\alpha|}{|z-\beta|} = \kappa$ ,  $\kappa > 0$  και  $\alpha, \beta$  δεδομένοι μιγαδικοί αριθμοί.
8. Να βρείτε το γ.τ των εικόνων των μιγαδικών που είναι λύσεις της εξίσωσης  $|z-1|^2 + |z-3-2i|^2 = 6$
9. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί  $z_1 = 1+3i$ ,  $z_2 = 3-3i$ ,  $z_3 = 1-9i$ , με εικόνες αντίστοιχα  $A, B, \Gamma$ . Δείξτε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές.
10. Αν ο μιγαδικός αριθμός  $\frac{z-1}{z+1}$ , με  $z \neq 1$  είναι φανταστικός, να βρείτε το γ.τ των εικόνων του  $z$ .
11. Να βρείτε το γ.τ των εικόνων των μιγαδικών αριθμών  $z$ , για τους οποίους ισχύει:  $|3-2iz+4z| = 7$
12. Να λύσετε γραφικά την ανίσωση:  $|5z-7-3i| < 6$

13. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί  $z$ ,  $w$  με  $w = z + \frac{1}{z}$ . Αν οι εικόνες

του  $z$  διαγράφουν κύκλο με κέντρο  $O(0,0)$  και ακτίνα  $\rho \neq 1$ , να δείξετε ότι οι εικόνες του  $w$  διαγράφουν έλλειψη.

14. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί  $z=x+yi$  ( με  $z \neq -1$ ,  $z \neq -2$  )

$$w_1 = \frac{z - 4i}{z + 2}, \quad w_2 = \frac{2 - 2i}{z + 1}.$$

- i) Αν  $\text{Re}(w_1)=0$ , να βρείτε το γ.τ των εικόνων του  $z$  (κύκλος).
- ii) Αν  $\text{Im}(w_2)=0$ , να βρείτε το γ.τ των εικόνων του  $z$  (ευθεία).
- iii) Να υπολογίσετε την απόσταση του κέντρου του κύκλου από την ευθεία, καθώς και το μήκος της χορδής που ο κύκλος αποκόπτει από την ευθεία.

15. Δίνεται ο μη πραγματικός αριθμός  $z=x+yi$ ,  $x,y \in \mathbb{R}$ . Θεωρούμε

τον μιγαδικό  $w = \frac{i(z^2 + 1)}{z + 1}$ . Να αποδειχθεί ότι αν ο  $w$  είναι

φανταστικός, τότε η εικόνα του  $z$  στο μιγαδικό επίπεδο γράφει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.