ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟΥΣ ΜΙΓΑΔΙΚΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ

1. **Να υπολογίσετε όλες τις δυνατές τιμές της παράστασης :**

$$k=\left(\frac{i-1}{1+2i}\right)^{\nu}+\left(\frac{6+2i}{1-3i}\right)^{\nu}\quad,\quad \nu\in N$$

2. **Να λύσετε στο σύνολο C των μιγαδικών αριθμών τις εξισώσεις:**

$2z^2-8z+15=0$	$3\bar{z}-3z+2\lvert z\rvert^2=26+12i$	$4z+3\bar{z}=x^2-y^2i+6+2i$ όπου $z=x+yi$ με $x,y\in R$

3. **Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης** $z^3-27=0$ **στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου.**

4. **Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών** $z=\dfrac{\lambda-2i}{\lambda+2i}\quad,\quad\lambda\in R$ **είναι σημεία κύκλου του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.**

5. **Αν** $w=\dfrac{iz+1}{\bar{z}+i}$ **, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ(z) – εικόνες του z – αν είναι : α)** $w\in R$ **β)** $w\in I$

6. **Για κάθε** $z\in C$**, να δείξετε ότι:**

$$\lvert z+9\rvert+\lvert z+7\rvert-\lvert z+5\rvert+\lvert z+3\rvert-\lvert z+1\rvert-\lvert z\rvert\le 13$$

7. **Για κάθε** $z\in C$**, να δείξετε ότι:** $\lvert 2z+1\rvert=\lvert z-7\rvert \Leftrightarrow \lvert z+3\rvert=5$

8. **Αν** $\lvert z-3+i\rvert=8$ **, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης**

$$w=\lvert z-11+7i\rvert$$

aris nikolaidis

9. Αν οι μιγαδικοί αριθμοί z_1 , z_2 έχουν εικόνες στο μιγαδικό επίπεδο τα σημεία Α , Β αντίστοιχα, που δεν ανήκουν στον κύκλο $C:\ x^2+y^2=1$, να δείξετε ότι:

$|z_1+z_2|>|1+z_1\cdot\bar{z}_2|$ $\Leftrightarrow$ **(ένα μόνο από τα σημεία Α , Β είναι εσωτερικό του κύκλου C)**

10. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z=(2\eta\mu\alpha-1)+(3-\sigma\upsilon\nu2\alpha)i\quad,\quad \alpha\in R$

Α) Δείξτε ότι οι εικόνες των σημείων Μ(z) είναι σημεία κύκλου.

Β) Να βρείτε τους μιγαδικούς που έχουν το μέγιστο και το ελάχιστο μέτρο.

Γ) Να βρείτε τα μέτρα των μιγαδικών αριθμών του προηγούμενου ερωτήματος

Δ) Να δείξετε ότι: $3\le|z-4+i|\le7$

11. Αν για το μιγαδικό αριθμό $z\in C$ ισχύει: $|z-5+3i|=|z-1-i|$

Α) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ(z).

Β) Να βρείτε το ελάχιστο $|z|$

Γ) Ποιος είναι ο μιγαδικός αριθμός με το ελάχιστο μέτρο;

12. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί z_1 και $z_2\neq0$. Να αποδείξετε ότι:

Α) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=\dfrac{\mathrm{Re}\left(z_1\bar{z}_2\right)}{|z_2|^2}$ **Β)** $\mathrm{Im}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=\dfrac{\mathrm{Im}\left(z_1\bar{z}_2\right)}{|z_2|^2}$

<u>Υπόδειξη</u>:

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\frac{\frac{z_1}{z_2}+\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}}{2}=\frac{z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2}{2z_2\bar{z}_2}=\frac{z_1\bar{z}_2+\overline{(z_1\bar{z}_2)}}{2|z_2|^2}=\frac{2\mathrm{Re}\left(z_1\bar{z}_2\right)}{2|z_2|^2}=\frac{\mathrm{Re}\left(z_1\bar{z}_2\right)}{|z_2|^2}$$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\frac{\frac{z_1}{z_2}-\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}}{2i}=\frac{z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1z_2}{2z_2\bar{z}_2\,i}=\frac{z_1\bar{z}_2-\overline{(z_1\bar{z}_2)}}{2|z_2|^2\,i}=\frac{2\mathrm{Im}\left(z_1\bar{z}_2\right)\cdot i}{2|z_2|^2\,i}=\frac{\mathrm{Im}\left(z_1\bar{z}_2\right)}{|z_2|^2}$$

aris nikolaidis