ΤΟ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟ ΑΚΡΟ ΣΤΗΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ :

Αν έχουμε μια συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα [α , β] και k , x $\in$ [α , β] τότε η συνάρτηση f στο [k , x] είναι συνεχής και επομένως υπάρχει το ολοκλήρωμα $\int_k^x f(t)dt$.

Θεωρώντας τώρα το k σταθερό σημείο του διαστήματος [α , β] σε κάθε x $\in$ [α , β] αντιστοιχεί μια μοναδική τιμή του ολοκληρώματος $\int_k^x f(t)dt$ δηλαδή ορίζεται μια νέα συνάρτηση $F(x)=\int_k^x f(t)dt$ με πεδίο ορισμού το [α , β] και k $\in$ [α , β] που λέγεται παράγουσα της f στο [α , β].

Στη συνάρτηση που ορίζεται με αυτόν τον τρόπο το x παριστάνει την ανεξάρτητη μεταβλητή της συνάρτησης και το t τη μεταβλητή ολοκλήρωσης.

ΘΕΩΡΗΜΑ: Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο [α , β] , τότε η συνάρτηση $F(x)=\int_k^x f(t)dt$ με πεδίο ορισμού το [α , β] και k $\in$ [α , β] είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα [α , β] και ισχύει: $F'(x)=f(x)$

Με βάση το θεώρημα αυτό παρατηρούμε ότι:

- ✓ **Κάθε συνεχής συνάρτηση είναι παράγωγος μιας άλλης συνεχούς συνάρτησης.**
- ✓ **Αν επιλέξουμε ένα άλλο σημείο k του διαστήματος [α , β] , τότε προκύπτει μια άλλη παράγουσα της f.**
- ✓ **Αν η f είναι ν φορές παραγωγίσιμη τότε η F είναι ν+1 φορές παραγωγίσιμη.**

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση $F(x)=\int_1^x |t|\,dt \quad , \quad x\in[-2,2]$. Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια , τη μονοτονία , τα ακρότατα και τα κοίλα.

Υπόδειξη: Η συνάρτηση $f(x)=|x|$ είναι συνεχής στο [-2 , 2] και άρα η F ορίζεται και είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα αυτό, άρα και συνεχής.

Έχουμε μάλιστα ότι $F'(x)=|x|>0$ για κάθε x $\in$ [-2 , 2] με $F'(0)=0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα [-2 , 2]. Τα ακρότατα θα τα αναζητήσουμε στα άκρα του [-2 , 2]. Έτσι έχουμε ελάχιστη τιμή:

$F(-2)=\int_1^{-2}|t|\,dt=-\int_{-2}^{1}|t|\,dt=-\int_{-2}^{0}(-t)dt-\int_0^1 tdt=\int_{-2}^{0}tdt-\int_0^1 tdt=\ldots$ και μέγιστη τιμή:

$F(2)=\int_1^2|t|\,dt=\int_1^2 tdt=\frac{3}{2}$

Επειδή $F''(x)=\begin{cases}-1\ , & x<0\\ 1\ , & x>0\end{cases}$ η F στρέφει τα κοίλα κάτω στο διάστημα [-2 , 0) και πάνω στο (0 , 2].

2. **α)** **Δείξτε ότι αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και άρτια στο [-x , x] , x>0 τότε** $\int_{-x}^{x}f(t)dt=2\int_0^x f(t)dt$ **.**

β) **Δίνεται η συνάρτηση F με** $F(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt\ \ ,\ \ x\in R$ **.**

- ✓ **Δείξτε ότι η F είναι περιττή**
- ✓ **Δείξτε ότι:** $F(x)\le x\ \ ,\ \text{για κάθε } x\ge 0$ **και ότι:** $F(x)\ge x\ \ ,\ \text{για κάθε } x\le 0$

3. **Δίνεται η συνάρτηση** $f(x)=\int_1^x e^{-t^2}dt$ **. Να αποδείξετε ότι:**

α) **Η είναι γνησίως αύξουσα στο R.**

β) **Έχει μοναδικό σημείο καμπής πάνω στον αρνητικό ημιάξονα oy΄ και ισχύει:** $-1<f(0)<0$

γ) **Ισχύει η ανισότητα :** $0\le f(x)<\frac{1}{e}\ \ \text{για κάθε}\ \ x\ge 1$

Υπόδειξη:

α) Η συνάρτηση $\varphi(t)=e^{-t^2}$ είναι συνεχής στο R και άρα η $f(x)=\int_1^x e^{-t^2}dt$ παραγωγίσιμη με

$f'(x)=e^{-x^2}>0\ \ \text{για κάθε}\ \ x\in R$, που σημαίνει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

β) $f''(x)=-2\cdot x\cdot e^{-x^2}>0\Leftrightarrow x<0$. Έχει λοιπόν η f σημείο καμπής το M(0 , f(0)) που είναι σημείο του αρνητικού ημιάξονα Oy΄ διότι: $f(0)=\int_1^0 e^{-t^2}dt=-\int_0^1 e^{-t^2}dt<0\ \ ,\ \ \text{αφού}\ \ e^{-t^2}>0$. Θα δείξουμε τώρα ότι $-1<f(0)$. Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Τ. για την συνάρτηση f(x) στο διάστημα [0 , 1]. Έτσι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ ώστε: $f'(\xi)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow \ln[-f(0)]<0\Leftrightarrow 0<-f(0)<1\Leftrightarrow -1<f(0)<0$

γ) Για κάθε $t\in[1,+\infty)\Rightarrow t\ge 1\Rightarrow t^2\ge t\Rightarrow -t^2\le -t\Rightarrow e^{-t^2}\le e^{-t}$ και επομένως για κάθε $x\ge 1$ έχουμε: $f(x)=\int_1^x e^{-t^2}dt\le\int_1^x e^{-t}dt=[-e^{-t}]_1^x=\frac{1}{e}-e^{-x}<\frac{1}{e}$ και επειδή $e^{-t^2}>0\ \ldots\ f(x)=\int_1^x e^{-t^2}dt\ge 0$

4. Θεωρούμε τη συνάρτηση: $f(x)=\int_1^x \frac{e^t}{t}dt \quad , \quad \text{για κάθε } x\geq 0$

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες είναι: $f(x)\geq \ln x$

β) Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{e^{t-x}}{t}dt$

<u>Υπόδειξη</u>:

α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-\ln x\,|\,(0,+\infty)$ με g(1)=…=0 και

$g'(x)=\ldots=\frac{e^x-1}{x}>0\Leftrightarrow x>0$ δηλ. η g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,+\infty)$ και άρα :

$1\leq x \Leftrightarrow g(1)\leq g(x)\Leftrightarrow 0\leq f(x)-\ln x\Leftrightarrow f(x)\geq \ln x$

$0<x<1\Rightarrow g(x)<g(1)\Leftrightarrow f(x)-\ln x<0\Leftrightarrow f(x)<\ln x$

Άρα : $f(x)\geq \ln x \Leftrightarrow x\geq 1$

β) $\int_1^x \frac{e^{t-x}}{t}dt=\int_1^x e^{-x}\cdot\frac{e^t}{t}dt=e^{-x}\cdot\int_1^x\frac{e^t}{t}dt=\frac{f(x)}{e^x}$ και άρα : $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{e^{t-x}}{t}dt=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{e^x}$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ αφού $f(x)\geq \ln x$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ εφαρμόζοντας το θεώρημα De L' Hospital έχουμε: $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{e^{t-x}}{t}dt=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{e^x}=\ldots=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

5. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση f στο [0 , 3] για την οποία ισχύει:

$\int_2^x f(t)dt\geq x^3-\text{συν}(\pi x)-7 \quad \text{για κάθε } x\in[0,3]$**. Να αποδείξετε ότι: f(2)=12.**

<u>Υπόδειξη</u>:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\int_2^x f(t)dt-x^3+\text{συν}(\pi x)+7\geq 0 \quad \text{για κάθε } x\in[0,3]$. Επειδή η f είναι συνεχής συνάρτηση, η $\int_2^x f(t)dt$ θα είναι παραγωγίσιμη και άρα η g παραγωγίσιμη σαν άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $g'(x)=f(x)-3x^2-\pi\cdot\text{ημ}(\pi x)$. Προφανώς $g(x)\geq 0=g(2)$ και το 2 είναι εσωτερικό σημείο του [0 , 3] . Άρα από το θεώρημα Fermat προκύπτει ότι:

$g'(2)=0\Leftrightarrow f(2)-12-\pi\cdot\text{ημ}(2\cdot\pi)=0\Leftrightarrow f(2)=12$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\int_0^x\frac{t-1}{e^t}dt \quad \text{για κάθε } x\in R$ **.**

α) Να προσδιοριστούν τα διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα, τα σημεία καμπής, οι ασύμπτωτες της και να γίνει μια πρόχειρη γραφική παράσταση της της f. Ποιο είναι το σύνολο τιμών της ;

β) Να βρείτε το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου που οριοθετείται από την ευθεία x=λ>0 τον άξονα x΄x και την καμπύλη (c). Επίσης να βρείτε το $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} E(\lambda)$

γ) Να προσδιοριστεί συνεχής συνάρτηση g για την οποία ισχύει:

$\int_{\alpha}^{x} g(t)dt = \eta\mu x - \frac{\sqrt{2}}{2}$ **και να βρεθούν οι τιμές του** $\alpha \in [0, \pi]$

Υπόδειξη:

α) $f'(x) = \frac{x-1}{e^x} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$ και $f''(x) = \frac{2-x}{e^x} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$. Επίσης

$f(x) = \int_0^x (t-1)\cdot e^{-t}dt = ... = [-t\cdot e^{-t}]_0^x = -\frac{x}{e^x} < 0$ για κάθε $x > 0$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = ... = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = ... = +\infty$

Τελικά : $f|(-\infty,1)\downarrow$, $f|(1,2)\uparrow$, $f|(2,+\infty)\uparrow$, $y_{min} = -\frac{1}{e}$, $y_k = -\frac{2}{e^2}$ και σύνολο τιμών

$[-\frac{1}{e}, +\infty)$. Ο άξονας x΄x είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f. Κατακόρυφη ασύμπτωτη δεν υπάρχει , ούτε πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$

β) $E(\lambda) = ... = -\lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda} + 1 > 0$, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} E(\lambda) = 1$

γ) Παραγωγίζοντας την δεδομένη σχέση έχουμε : $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και έτσι έχουμε:

$\int_{\alpha}^{x} \sigma\upsilon\nu t dt = \eta\mu x - \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow [\eta\mu t]_{\alpha}^{x} = \eta\mu x - \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \eta\mu\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

7. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f ορισμένη στο $[0, +\infty)$ **με**

$x + \int_0^x f(t)dt = (x+1)\cdot f(x)$, για κάθε $x \geq 0$. **Να βρεθούν:**

α) οι τύποι των f και $F(x) = \int_0^x f(t)dt$

β) τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και F.

Υπόδειξη:

$$x+\int_0^x f(t)dt=(x+1)\cdot f(x)\quad,\ \text{για κάθε}\ x\ge 0 \Leftrightarrow 1+f(x)=[(x+1)\cdot f(x)]' \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{x+1}$$ και

άρα: f(x)=ln(x+1). Από την δεδομένη σχέση έχουμε:

$$\int_0^x f(t)dt=(x+1)\cdot \mathrm{lh}(x+1)-x \Rightarrow F(x)=(x+1)\cdot \mathrm{lh}(x+1)-x$$

8. Να βρείτε τον τύπο της πολυωνυμικής συνάρτησης του μικρότερου βαθμού που έχει τοπικό μέγιστο 23 για x=2 και τοπικό ελάχιστο 19 για x=4.

Υπόδειξη:

Η συνάρτηση f σαν πολυωνυμική θα είναι παραγωγίσιμη στο IR και επομένως τα ακρότατα θα εμφανίζονται στις ρίζες της πρώτης παραγώγου, που θα είναι πολυωνυμική συνάρτηση. Άρα θα έχει την μορφή:

$$f'(x)=\alpha(x-2)(x-4)=\alpha(x^2-6x+8) \Rightarrow \int_2^x f'(x)dx=\int_2^x \alpha(x^2-6x+8)dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [f(x)]_2^x=\alpha\cdot(\frac{x^3}{3}-3x^2+8x-\frac{20}{3}) \Rightarrow f(x)=\alpha\cdot(\frac{x^3}{3}-3x^2+8x-\frac{20}{3})+23$$

Υπολογισμός του α: f(4)=19 ….και α=3. Άρα …….

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+2\cdot e^{-x}}{3\cdot x^2+4\cdot e^{-x}}$

α) Να μελετηθεί η f ως της τη μονοτονία, της ασύμπτωτες και να βρεθεί το σύνολο τιμών της.

β) Να υπολογιστούν τα όρια: $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1} f(t)dt \quad , \quad \lim\limits_{x\to-\infty}\int_{x-1}^{x} f(t)dt$

Υπόδειξη:

α) $$f'(x)=\frac{-2xe^{-x}(x+2)}{(3x^2+4e^{-x})^2}\ge 0 \Leftrightarrow -2\le x\le 0$$

$y_{min}=f(-2)\quad,\quad y_{max}=f(0)=\frac{1}{2}$. Αφού η f είναι ορισμένη και συνεχής στο R δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{2e^{-x}}{x^2}}{3+\frac{4e^{-x}}{x^2}}=\frac{1}{3}\quad,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^2}{e^{-x}}+2}{3\frac{x^2}{e^{-x}}+4}=\frac{1}{2}$$

Άρα η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντιες ασύμπτωτες τις ευθείες

$y=\frac{1}{3}$ και $y=\frac{1}{2}$ στο $+\infty$ και $-\infty$ αντίστοιχα. Σύνολο τιμών : $(\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$

β) Για x>0 η f είναι γνησίως φθίνουσα και άρα στο διάστημα [x , x+1] , x>0 η μέγιστη τιμή της f είναι f(x) ενώ η ελάχιστη τιμή της είναι f(x+1) και επομένως :

$$f(x+1)\cdot(x+1-x) \le \int_x^{x+1} f(t)dt \le f(x)\cdot(x+1-x) \Leftrightarrow f(x+1) \le \int_x^{x+1} f(t)dt \le f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x+1) \le \lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+1} f(t)dt \le \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

Όμως $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x+1) = \frac{1}{3}$ και άρα από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε :

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+1} f(t)dt = \frac{1}{3}$$

Για x<-2 η f είναι γνησίως φθίνουσα και άρα στο διάστημα [x-1 , x] , x<-2 η μέγιστη τιμή της f είναι f(x-1) και η ελάχιστη τιμή της f(x). Έτσι

$$f(x)\cdot[x-(x-1)] \le \int_{x-1}^{x} f(t)dt \le f(x-1)\cdot[x-(x-1)] \Leftrightarrow f(x) \le \int_{x-1}^{x} f(t)dt \le f(x-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) \le \lim_{x\to-\infty} \int_{x-1}^{x} f(t)dt \le \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

Τελικά … $\lim_{x\to-\infty} \int_{x-1}^{x} f(t)dt = \frac{1}{2}$

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f , να αποδείξετε ότι υπάρχει η f^{-1} και να βρεθεί ο τύπος της

β) Αν $\int_0^x g(t)dt = f^{-1}(x)$, να βρεθεί ο τύπος της g(x)

γ) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της y=g(x) τους ημιάξονες OX και OY και την ευθεία x=1.

δ) Να υπολογιστεί το όριο : $\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+1} g(t)dt$

11. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο διάστημα [0 , 1] η οποία παραγωγίζεται δύο φορές και για την οποία ισχύει $f'(0)=0$ και

$$f(x)\cdot f''(x) - 2\cdot[f'(x)]^2 = m\cdot f^3(x) \quad , \quad m\in[0,1]$$

Έστω g μια συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει

$\int_0^x g(x)dx = \frac{f(x)-1}{f(x)}$ για κάθε $x \in [0,1]$**. Να βρεθεί το m ώστε η συνάρτηση**

$u(x) = x - g(x)$ **, να είναι σταθερή στο [0 , 1]. Μετά να βρείτε τους τύπους των συναρτήσεων u και g.**

<u>Υπόδειξη</u>:

Για να είναι η u σταθερή στο [0 , 1] πρέπει $u'(x) = 0$. $u'(x) = ... = 1 - \frac{m \cdot f^3(x)}{f^3(x)} = 1 - m$ και άρα m=1. Αφού η u είναι σταθερή αρκεί να βρούμε μια τιμή της. $u(0) = 0 - g(0) = -\frac{f'(0)}{f^2(0)} = 0$

Άρα u(x)=0 και g(x)=x