Ολοκληρώματα
(ασκήσεις)

1. Να μελετηθεί η συνάρτηση $f(x)=\int_0^x (t-1)(t-2)^2\,dt$ ως προς την μονοτονία, τα ακρότατα, τα κοίλα, τα σημεία καμπής και να γίνει ο πίνακας μεταβολών της.

2. Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim_{x\to 0}\left[x\cdot\int_0^1 \sigma\upsilon\nu t^2\,dt\right]$, $\lim_{x\to +\infty}\frac{\int_1^x \ln t\,dt}{x^2-1}$

   Υπόδειξη: Η $f(x)=\int_0^x \sigma\upsilon\nu t^2\,dt$ ορίζεται στο R και είναι παραγωγίσιμη, διότι η συνt^2 είναι συνεχής στο R. Άρα η $h(x)=\frac{1}{x}\cdot\int_0^x \sigma\upsilon\nu t^2\,dt=\frac{\int_0^x \sigma\upsilon\nu t^2\,dt}{x}$ ορίζεται στο R^* , οπότε έχει έννοια το όριο. Ακόμη $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$ γιατί η f είναι συνεχής σαν παραγωγίσιμη. Έχουμε λοιπόν απροσδιόριστη μορφή ....

3. (ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ):

   I) Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και αντιστρέψιμη στο διάστημα [α,β] τότε: $\int_{f(a)}^{f(\beta)} f^{-1}(y)\,dy=\int_a^{\beta} x\cdot f'(x)\,dx$

   II) Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και αντιστρέψιμη στο διάστημα [α,β] με f(α)=α και f(β)=β τότε: $\int_a^{\beta} f^{-1}(x)\,dx=\int_a^{\beta}(2x-f(x))\,dx$

   III) Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και αντιστρέψιμη στο διάστημα [α,β] με f(α)=β και f(β)=α τότε: $\int_a^{\beta} f^{-1}(x)\,d\chi=\int_a^{\beta} f(x)\,dx$

Υπόδειξη:

I) Για κάθε χ∈[α,β] ισχύει y=f(x) $\Leftrightarrow$ x=f^{-1}(y) και άρα:

$$\int_{a}^{\beta} x\cdot f'(x)dx=\int_{a}^{\beta} f^{-1}(f(x))\cdot f'(x)dx=\int_{f(a)}^{f(\beta)} f^{-1}(y)dy$$

II)

$$\int_{a}^{\beta} f^{-1}(y)dy=\int_{a}^{\beta} x\cdot f'(x)dx=\left[x\cdot f(x)\right]_{a}^{\beta}-\int_{a}^{\beta} f(x)dx=...=\beta^2-a^2-\int_{a}^{\beta} f(x)dx=...$$

III)

$$\int_{a}^{\beta} f^{-1}(y)dy=\int_{f(\beta)}^{f(a)} f^{-1}(y)dy=\int_{f(\beta)}^{f(a)} f^{-1}(f(x))\cdot f'(x)dx=\int_{\beta}^{\alpha} x\cdot f'(x)dx=\left[x\cdot f(x)\right]_{\beta}^{\alpha}-\int_{\beta}^{a} f(x)dx=...$$

4. ι) Αν $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{2}$, χ∈[-1,1] να υπολογίσετε το $\int_{-1}^{1} f^{-1}(x)dx$

ιι) Αν $f(x)=\begin{cases}\ln(x+1-ex)\ , & x\le 0\\ x^3-x^2-x\ , & x>0\end{cases}$ να υπολογίσετε το $\int_{-1}^{1} f^{-1}(x)dx$

5. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f|[0,+∞) για την οποία ισχύει:

$x+\int_{0}^{x} f(t)dt=(x+3)\cdot f(x)\ ,\ x\ge 0$. Να βρεθούν οι τύποι των f

και $F(x)=\int_{0}^{x} f(t)dt$.

<u>Υπόδειξη</u> :

Παραγωγίζοντας την σχέση που δίνεται βρίσκουμε $f'(x)=\frac{1}{x+3}$ και

ολοκληρώνοντας ... f(x)=ln(x+3)+c. Όμως f(0)=ln3+c και από την υπόθεση

0=3·f(0) δηλ. c=-ln3. Τελικά ... $F(x)=(x+3)\ln\frac{x+3}{3}-x$

6. Δίνονται οι συναρτήσεις $F(x)=\int_{\sqrt{1-x}}^{\sqrt{x^2-1}}\frac{e^t}{t}dt$ και G(x)=α·e^x.

ι) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της F.

ιι) Να παραγωγίσετε την F

ιιι) Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό α, ώστε οι εφαπτόμενες στις γραφικές παραστάσεις των F , G στα σημεία Α(-2,F(-2)) και $B(\sqrt{3},G(\sqrt{3}))$ να είναι κάθετες μεταξύ τους.

<u>Υπόδειξη</u> :

Πρέπει $χ^2$-1>0 και 1-χ>0 (όχι ίσα με 0 διότι t$\neq$0) … Άρα χ< -1

F΄(χ)=… $-\frac{1}{2}e^{\sqrt{3}}$

7. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f|(0,+ ∞) με την ιδιότητα:

$\int_1^2 f(t)dt=0$. Αν $g(x)=3+\frac{1}{x^2}\cdot\int_1^x f(t)dt$, $x\in(0,+\infty)$ να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ∈(1,2) ώστε:

ι) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της y=g(x) στο σημείο (ξ,f(ξ)) να είναι παράλληλη προς τον άξονα χ΄χ.

ιι) $g(\xi)=3+\frac{f(\xi)}{2\xi}$

<u>Υπόδειξη</u> :

Θεώρημα Rolle για την g στο [1,2] ….

8. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f|(0,+ ∞) με την ιδιότητα:

$\int_1^2 f(t)dt=1$. Αν $g(x)=1+\frac{4}{x^2}\cdot\int_1^x f(t)dt$, $x\in(0,+\infty)$ να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ∈(1,2) ώστε:

ι) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της y=g(x) στο σημείο (ξ,f(ξ)) να είναι παράλληλη προς τη διχοτόμο της $1^{ης} – 3^{ης}$ γωνίας των αξόνων.

ιι) $g(\xi)=1+\dfrac{2f(\xi)}{\xi}-\dfrac{\xi}{2}$

9. Να βρεθούν οι συναρτήσεις f, που ικανοποιούν την σχέση $f'(x)+f(x)=e^x$, για κάθε $x\in R$.
   Από τις συναρτήσεις αυτές να προσδιορίσετε εκείνη που η γραφική της παράσταση εφάπτεται στην ευθεία y=1 και να δείξετε ότι βρίσκεται πάνω από αυτή την ευθεία.
   <u>Υπόδειξη</u> :
   Πολ/ζοντας με e^x την δοθείσα σχέση έχουμε (παράγωγος γινομένου) …
   $f(x)=e^x/2+ce^{-x}$.
   ….. c=1/2
   Για να βρίσκεται η γραφική της παράσταση πάνω από y=1 αρκεί $f(x)\geq 1$ ….

10. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$\int (x^2+x+1)e^{1-2x}dx$	$\int \eta\mu(2x+\frac{\pi}{3})e^{2-x}dx$	$\int \sigma\upsilon\nu\frac{x}{2}\cdot e^{x+1}dx$
$\int (x^2+x-2)\eta\mu 3xdx$	$\int (2x^3+x+1)\cdot\sigma\upsilon\nu 2xdx$	$\int (x^2+3x-1)\cdot\ln(2x)dx$
$\int \ln(2x)dx$	$\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}}dx$	$\int x^2\ln^2 xdx$
$\int \eta\mu^2 xdx$	$\int \eta\mu^3 xdx$	$\int \eta\mu^4 xdx$
$\int \sigma\upsilon\nu^2 xdx$	$\int \sigma\upsilon\nu^3 xdx$	$\int \sigma\upsilon\nu^4 xdx$
$\int \eta\mu 2x\sigma\upsilon\nu 3\chi xdx$	$\int \eta\mu 2x\eta\mu 3xdx$	$\int \sigma\upsilon\nu 2x\sigma\upsilon\nu 3xdx$

$\int \eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^3 x dx$	$\int \eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu^2 x dx$	$\int \eta\mu^3 x\sigma\upsilon\nu^2 x dx$
$\int \frac{1}{\eta\mu x} dx$	$\int \varepsilon\phi x dx$	$\int \sigma\phi x dx$
$\int \varepsilon\phi^2 3x dx$	$\int \sigma\phi^2 3x dx$	$\int \sqrt{4-x^2} dx$
$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$	$\int x\sqrt{1+x^2} dx$	$\int x\sqrt{x^2-4} dx$
$\int \frac{e^{2x}-2e^x}{e^x+1} dx$	$\int \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}} dx$	$\int \frac{2x+1}{x^2-5x+6} dx$
$\int \frac{x^2+1}{x(x-2)^2} dx$	$\int \frac{x^4+2}{x^3+1} dx$	$\int \frac{1}{2x^3+x^5} dx$

11. Αν f|[-α,α] είναι μια συνάρτηση συνεχής (α>0) δείξτε ότι :

- Αν η f είναι άρτια τότε: $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 2\int_{0}^{\alpha} f(x)dx$
- Αν η f είναι περιττή τότε: $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$
- Αν η f είναι συνεχής στο R και περιοδική με περίοδο T, τότε το ολοκλήρωμα $\int_{a}^{a+T} f(x)dx$ είναι ανεξάρτητο του α και μάλιστα

  $$\int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$$

12. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

$\int_{-1}^{1}(x^2+1)dx$	$\int_{-1}^{1}\frac{x^2\eta\mu x}{x^4+1}dx$

13. Δείξτε ότι: $\int_{a}^{xa}\frac{1}{t}dt=\int_{1}^{x}\frac{1}{t}dt \ , \ \alpha, x\in R_{+}^{*}$

14. Δίνεται η συνάρτηση $F(x)=\int_{1}^{x}\frac{1}{t}dt$. Δείξτε ότι:

- L(xy)=L(x)+L(y)
- L(1/x)=-L(x)
- L(x/y)=L(x)-L(y)

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2+1}{x-1}$.

- Να κάνετε μελέτη και γραφική παράσταση της f
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα χ΄χ και τις ευθείες χ=0 , χ=t<0.
- Αν E(t) είναι το προηγούμενο εμβαδόν, να υπολογίσετε το $\lim_{t\to-\infty}E(t)$

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} e^x & , \ x\geq 0 \\ \frac{1}{2}x+1 & , \ x\leq 0 \end{cases}$.

Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα χ΄χ και τις ευθείες χ=-4 , χ=4

17. Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=-\frac{3}{x} \ , \ x<0$, τον άξονα ψ΄ψ και τις ευθείες ψ=1 , ψ=4.

18. Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y^2 = 4x$, τον άξονα ψ΄ψ και τις ευθείες ψ=-2 , ψ=3.

19. Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^2-x-2$, $g(x)=-x-1$ και τις ευθείες χ=-2 χ=3.

20. Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x^3-3x$, $g(x)=-x^2+3x$ και τις ευθείες x=-2 x=2.

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{2x}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη της στο σημείο με τετμημένη 1 και τις ευθείες χ=0 , χ=1.