ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΚΑΙ ΔΙΑΤΑΞΗ

ΘΕΩΡΗΜΑ 1:

Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα [α , β] με $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha , \beta]$

τότε: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2:

Αν f , g είναι συναρτήσεις ορισμένες και συνεχείς στο [α , β] και $f(x) \leq g(x)$, για κάθε $x \in [\alpha , \beta]$ τότε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3:

Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα [α , β] με m , M ελάχιστη και μέγιστη

τιμή στο [α , β] αντίστοιχα, τότε: $m(\beta - \alpha) \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq M(\beta - \alpha)$

ΘΕΩΡΗΜΑ 4: (Μέσης Τιμής Ολοκληρωτικού Λογισμού)

Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα [α , β] τότε υπάρχει $\xi \in [\alpha , \beta]$ ώστε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = f(\xi)(\beta - \alpha)$$

Άσκηση 1:

Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής στο διάστημα [α , β], τότε: $\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|dx$

Υπόδειξη : $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \Rightarrow -\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|\,dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|\,dx \Rightarrow \left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx\right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|\,dx$

Άσκηση 2:

Αν f , g είναι συναρτήσεις ορισμένες και συνεχείς στο [α , β] τότε:

$$\left|\int_{\alpha}^{\beta} (\ f(x) \cdot g(x)\ )dx\right| \leq \sqrt{\int_{\alpha}^{\beta} f^2(x)dx \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g^2(x)dx}$$

aris nikolaidis

Υπόδειξη : Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=[f(x)-\lambda g(x)]^2 \geq 0\ ,\ \lambda \in R\ ,\ x \in [\alpha , \beta]$ οπότε

$$\int_\alpha^\beta h(x)dx \geq 0 \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta [f^2(x)+\lambda^2 g^2(x)-2\lambda f(x)g(x)]dx \geq 0 \Leftrightarrow \lambda^2\int_\alpha^\beta g^2(x)dx - 2\lambda\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx + \int_\alpha^\beta f^2(x)dx \geq 0$$

Για να ισχύει η σχέση αυτή για κάθε πραγματική τιμή του λ (τριώνυμο ως προς λ) πρέπει:

$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow$ ……

Πόρισμα:

Αν f , g είναι συναρτήσεις ορισμένες και συνεχείς στο [α , β] τότε:

$$\left(\int_\alpha^\beta \left(f(x)\cdot g(x) \right)dx\right)^2 \leq \int_\alpha^\beta f^2(x)dx \cdot \int_\alpha^\beta g^2(x)dx$$

Άσκηση 3: (Γενίκευση Θεωρήματος Μέσης Τιμής Ολοκληρωτικού Λογισμού)

Αν f , g είναι συναρτήσεις ορισμένες και συνεχείς στο [α , β] και η g διατηρεί σταθερό πρόσημο στο [α , β] τότε: $\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx = f(\xi)\cdot\int_\alpha^\beta g(x)dx \quad , \quad \text{όπου}\ \ \xi \in [\alpha , \beta]$

Υπόδειξη : Αφού η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α , β], θα έχει μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m και θα ισχύει: $m \leq f(x) \leq M \ \text{για κάθε}\ x \in [\alpha,\beta] = m\cdot g(x) \leq f(x)\cdot g(x) \leq M\cdot g(x)$, άρα

$$m\cdot\int_\alpha^\beta g(x)dx \leq \int_\alpha^\beta f(x)\cdot g(x)dx \leq M\cdot\int_\alpha^\beta g(x)dx \Rightarrow m \leq \frac{\int_\alpha^\beta f(x)\cdot g(x)dx}{\int_\alpha^\beta g(x)dx} \leq M$$

Άρα υπάρχει $\xi \in [\alpha , \beta]\ \text{με}\ f(\xi) = \frac{\int_\alpha^\beta f(x)\cdot g(x)dx}{\int_\alpha^\beta g(x)dx} \Rightarrow \int_\alpha^\beta f(x)\cdot g(x)dx = f(\xi)\cdot\int_\alpha^\beta g(x)dx$

Άσκηση 4:

Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, συνεχής και στρέφει τα κοίλα άνω στο διάστημα [α , β],

τότε: $(\beta - \alpha)f(\alpha) < \int_\alpha^\beta f(x)dx < (\beta - \alpha)\cdot\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$

Υπόδειξη : Να κάνετε γεωμετρική απόδειξη

aris nikolaidis

Άσκηση 5:

Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, συνεχής και στρέφει τα κοίλα κάτω στο διάστημα [α , β],

τότε: $(\beta - \alpha) \cdot \dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2} < \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx < (\beta - \alpha) f(\beta)$

Υπόδειξη : Να κάνετε γεωμετρική απόδειξη

Άσκηση 6:

Να αποδείξετε ότι: $\int_0^1 \dfrac{\eta\mu x}{1+x^2}dx < 1 - \sigma\upsilon\nu 1^0$ και $\int_0^1 \sqrt{1+x^4}dx \le \sqrt{\dfrac{6}{5}}$

Υπόδειξη : Από τη γενίκευση του θεωρήματος μέσης τιμής έχουμε:

$$\text{Υπάρχει } \xi \in [0,1]: \int_0^1 \frac{\eta\mu x}{1+x^2}dx = \frac{1}{1+\xi^2}\int_0^1 \eta\mu x dx = \frac{1}{1+\xi^2}[-\sigma\upsilon\nu x]_0^1 < 1 - \sigma\upsilon\nu 1^0$$

Αν θεωρήσουμε $f(x) = \sqrt{1+x^4}$ και $g(x) = 1$ από την άσκηση 2 έχουμε:

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^4}dx \le \sqrt{\int_0^1 \left(\sqrt{1+x^4}\right)^2 dx \cdot \int_0^1 1^2 dx} = \sqrt{\int_0^1 (1+x^4)dx} = \sqrt{\left[x + \frac{x^5}{5}\right]_0^1} = \sqrt{\frac{6}{5}}$$

Άσκηση 7:

Να αποδείξετε ότι: $1 < \int_0^1 e^{x^2} dx < e$

Υπόδειξη : $0 < x < 1 \Rightarrow 0 < x^2 < 1 \Rightarrow e^0 < e^{x^2} < e^1 \Rightarrow \int_0^1 1dx < \int_0^1 e^{x^2}dx < \int_0^1 edx \Rightarrow 1 < \int_0^1 e^{x^2}dx < e$

Άσκηση 8:

Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής σε ένα διάστημα Δ, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{\beta - \alpha}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \le \frac{1}{\gamma - \beta}\int_{\beta}^{\gamma} f(x)dx \Leftrightarrow f \,|\, \Delta \uparrow \ \text{ για κάθε } \alpha,\beta,\gamma \in \Delta \text{ με } \alpha < \beta < \gamma$$

aris nikolaidis

Υπόδειξη : Θεωρώ τη συνάρτηση f ορισμένη και συνεχή στο [α , β] οπότε από το θεώρημα της μέσης τιμής θα υπάρχει ξ_1 στο διάστημα αυτό με $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = f(\xi_1)\cdot(\beta-\alpha) \Leftrightarrow f(\xi_1) = \dfrac{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx}{\beta - \alpha}$. Όμοια για την f στο διάστημα [β , γ] θα υπάρχει ξ_2 στο διάστημα αυτό με $f(\xi_2) = \dfrac{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx}{\beta - \alpha}$.

- ✓ Αν η f είναι αύξουσα θα έχουμε: $\xi_1 \le \xi_2 \Rightarrow f(\xi_1) \le f(\xi_2) \Rightarrow \dfrac{1}{\beta - \alpha}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \le \dfrac{1}{\gamma - \beta}\int_{\beta}^{\gamma} f(x)dx$
- ✓ Αντίστροφα αν $\dfrac{1}{\beta - \alpha}\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \le \dfrac{1}{\gamma - \beta}\int_{\beta}^{\gamma} f(x)dx \Rightarrow f(\xi_1) \le f(\xi_2)$ με $\xi_1 \le \xi_2$ και άρα η f είναι αύξουσα στο διάστημα Δ.

Άσκηση 9:

Να αποδείξετε ότι: $e^2 < \dfrac{1}{e-1}\int_{e}^{e^2} \dfrac{xdx}{\ln x} < \dfrac{e^2(e+2)}{4}$

Υπόδειξη : Θεωρώ τη συνάρτηση: $f(x) = \dfrac{x}{\ln x} \,|\, [e, e^2]$ που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα [e , e^2] με $f'(x) = \dfrac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$ και $f''(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\ln x(2-\ln x)}{\ln^4 x}$

Έτσι: $f'(x) \ge 0$ και $f''(x) \ge 0$ για κάθε $x \in [e, e^2]$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα και στρέφει τα κοίλα άνω στο διάστημα [e , e^2] , οπότε από την άσκηση 4 προκύπτει ότι:

$$f(e)\cdot(e^2 - e) < \int_{e}^{e^2} \frac{xdx}{\ln x} < (e^2 - e)\cdot\frac{f(e)+f(e^2)}{2} \Leftrightarrow \ldots$$

ΘΕΩΡΗΜΑ Cauchy :

Αν οι συναρτήσεις f , g είναι συνεχείς στο κλειστό διάστημα [α , β] , παραγωγίσιμες στο ανοικτό διάστημα (α , β) με $g(\alpha) \ne g(\beta)$ και $g(x) \ne 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$,

τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $\dfrac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

Σχόλιο : Το θεώρημα ισχύει και όταν οι συναρτήσεις f , g είναι συνεχείς στο [α , β] και παραγωγίσιμες στο (α , β). Τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta) : [f(\beta) - f(\alpha)] \cdot g'(\xi) = [g(\beta) - g(\alpha)] \cdot f'(\xi)$

Υπόδειξη : Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) \cdot [g(\beta) - g(\alpha)] - g(x) \cdot [f(\beta) - f(\alpha)]$ στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ που είναι συνεχής στο [α , β] παραγωγίσιμη στο (α , β) και

$h(\alpha) = f(\alpha) \cdot [g(\beta) - g(\alpha)] - g(\alpha) \cdot [f(\beta) - f(\alpha)] = f(\alpha) \cdot g(\beta) - f(\beta) \cdot g(\alpha)$

$h(\beta) = f(\beta) \cdot [g(\beta) - g(\alpha)] - g(\beta) \cdot [f(\beta) - f(\alpha)] = f(\alpha) \cdot g(\beta - f(\beta) \cdot g(\alpha)$

Από το θεώρημα Rolle υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε: $h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \ldots\ldots$

ΘΕΩΡΗΜΑ :

Αν οι συναρτήσεις f , g είναι συνεχείς στο κλειστό διάστημα [α , β] , με $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$, τότε υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $f(\xi) \cdot \int_\alpha^\beta g(x)dx = g(\xi) \cdot \int_\alpha^\beta f(x)dx$

Υπόδειξη : Θεωρούμε τις συναρτήσεις: $F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt$ και $G(x) = \int_\alpha^x g(t)dt$ με $x \in [\alpha, \beta]$ που είναι παραγωγίσιμες με $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = g(x)$. Έτσι από το θεώρημα Cauchy έχουμε ……

Σχόλιο : Αν g(x)=1 …. προκύπτει το θεώρημα της μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού.

Άσκηση 10:

Αν η συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής και αύξουσα στο διάστημα [0 , α] και

$F(x) = \int_0^x f(t)dx$, $x \in [0, \alpha]$ με $\alpha > 0$, να αποδείξετε ότι: $\int_0^x F(x)dx \geq \frac{\alpha^2}{2} \cdot f(0)$

Υπόδειξη : Θεωρούμε τη συνάρτηση G(x)=x στο διάστημα [0 , α]. Προφανώς οι F , G είναι παραγωγίσιμες στο διάστημα αυτό με G΄(x)=1 και F΄(x)=f(x). Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα

aris nikolaidis

υπάρχει

$$\xi\in(\alpha,\beta)\ \text{τέτοιο ώστε}:\ F(\xi)\cdot\int_0^{\alpha}G(x)dx=G(\xi)\cdot\int_0^{\alpha}F(x)dx\Leftrightarrow F(\xi)\cdot\int_0^{\alpha}dx=\xi\cdot\int_0^{\alpha}F(x)dx\Leftrightarrow\frac{F(\xi)}{\xi}=\frac{\int_0^{\alpha}F(x)dx}{\int_0^{\alpha}dx}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\int_0^{\xi}f(t)dt}{\xi}=\frac{\int_0^{\alpha}F(x)dx}{\frac{\alpha^2}{2}}$$

Η f όμως είναι αύξουσα στο διάστημα [0 , α] και άρα και στο [0 , ξ] με ξ>0 , οπότε

$$f(t)\geq f(0)\ ,\ t\in[0,\xi]\ \Rightarrow\int_0^{\xi}f(t)dt\geq\int_0^{\xi}f(0)dt\Rightarrow\frac{\int_0^{\xi}f(t)dt}{\xi}\geq\frac{\int_0^{\xi}f(0)dt}{\xi}\geq\frac{\xi f(0)}{\xi}=f(0)$$

Άρα $\dfrac{\int_0^{\alpha}F(x)dx}{\frac{\alpha^2}{2}}\geq f(0)\Rightarrow\int_0^{\alpha}F(x)dx\geq\dfrac{\alpha^2}{2}\cdot f(0)$

Άσκηση 11:

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα [α , β] και η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο διάστημα [α , β] , να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi)\cdot\int_{\alpha}^{\xi}f(t)dt+\xi\leq\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

Υπόδειξη : Θεωρούμε τις συναρτήσεις $F(x)=f'(x)\cdot\int_{\alpha}^{x}f(t)dt+x$ και $G(x)=1$ στο διάστημα [α , β] που είναι συνεχείς. Άρα

$$\text{θα υπάρχει}\ \xi\in(\alpha,\beta)\ \text{τέτοιο ώστε}:\ G(\xi)\cdot\int_{\alpha}^{\beta}F(x)dx=F(\xi)\cdot\int_{\alpha}^{\beta}G(x)dx\Leftrightarrow\int_{\alpha}^{\beta}F(x)dx=\left[f'(\xi)\cdot\int_{\alpha}^{\xi}f(t)dt+\xi\right]\cdot\int_{\alpha}^{\beta}dx\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\int_{\alpha}^{\beta}\left(f'(x)\int_{\alpha}^{x}f(t)dt+x\right)dx=\left[f'(\xi)\cdot\int_{\alpha}^{\xi}f(t)dt+\xi\right]\cdot(\beta-\alpha)\Leftrightarrow\left[f(x)\int_{\alpha}^{x}f(t)dt+\frac{x^2}{2}\right]_{\alpha}^{\beta}-\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\left[\int_{\alpha}^{x}f(t)dt\right]dx=\left[f'(\xi)\cdot\int_{\alpha}^{\xi}f(t)dt+\xi\right]\cdot(\beta-\alpha)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}-\int_{\alpha}^{\beta}f^2(x)dx=\left[f'(\xi)\cdot\int_{\alpha}^{\xi}f(t)dt+\xi\right]\cdot(\beta-\alpha)\Leftrightarrow\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}\geq\left[f'(\xi)\cdot\int_{\alpha}^{\xi}f(t)dt+\xi\right]\cdot(\beta-\alpha)\ \ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

aris nikolaidis

Άσκηση 12:

Να αποδειχθεί ότι: $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cdot \eta\mu^{\nu}x dx < \frac{4\pi}{16+\pi^2}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+x^2\right)\sigma\upsilon\nu^{\nu}x dx$

Υπόδειξη : Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=x\eta\mu^{\nu}x$ $\;\;$ και $\;\; g(x)=(1+x^2)\sigma\upsilon\nu^{\nu}x\neq 0$ στο διάστημα (0 , π/4). Άρα υπάρχει ξ στο διάστημα αυτό τέτοιο ώστε:

$$f(\xi)\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}} g(x)dx = g(\xi)\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx \Leftrightarrow \xi\cdot\eta\mu^{\nu}\xi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+x^2)\sigma\upsilon\nu^{\nu}x dx=(1+\xi^2)\cdot\sigma\upsilon\nu^{\nu}\xi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\eta\mu^{\nu}x dx\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\eta\mu^{\nu}x dx}{\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+x^2)\sigma\upsilon\nu^{\nu}x dx}=\frac{\xi\cdot\eta\mu^{\nu}\xi}{(1+\xi^2)\cdot\sigma\upsilon\nu^{\nu}\xi}=\frac{\xi}{1+\xi^2}\cdot\varepsilon\varphi^{\nu}\xi$$

Όμως αφού το ξ είναι σημείο του διαστήματος (0 , π/4) θα έχουμε $\dfrac{\xi}{1+\xi^2}<\dfrac{\frac{\pi}{4}}{1+\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}$ (προκύπτει από τη μονοτονία της $h(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ στο διάστημα $[0,\frac{\pi}{4}]$) ....

Άσκηση 13:

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [α , β] με α·β > 0 , να αποδειχθεί ότι :

$$\text{υπάρχει } \xi\in(\alpha,\beta) \text{ ώστε}: \int_\alpha^\beta f(x)dx=\frac{f(\xi)}{3\xi^2}\cdot(\beta^3-\alpha^3)$$

Υπόδειξη : $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)dx=\frac{f(\xi)}{3\xi^2}\cdot(\beta^3-\alpha^3)\Leftrightarrow\xi^2\cdot\int_\alpha^\beta f(x)dx=f(\xi)\cdot\frac{\beta^3-\alpha^3}{3}\Leftrightarrow\xi^2\cdot\int_\alpha^\beta f(x)dx=f(\xi)\cdot\int_\alpha^\beta x^2dx$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=x^2$ στο διάστημα [α , β]. Έτσι από προηγούμενο θεώρημα έχουμε:

$$g(\xi)\cdot\int_\alpha^\beta f(x)dx=f(\xi)\cdot\int_\alpha^\beta g(x)dx\Leftrightarrow\xi^2\cdot\int_\alpha^\beta f(x)dx=f(\xi)\cdot\int_\alpha^\beta x^2dx\Leftrightarrow\int_\alpha^\beta f(x)dx=\frac{f(\xi)}{3\xi^2}\cdot(\beta^3-\alpha^3)$$

aris nikolaidis