Ο Ρ Ι Α

1η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = k \in R \quad , \quad x_0 \in R$

I. Απροσδιοριστία $\left(\frac{0}{0}\right)$:

1. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2+3x-6}{x^2-5x+6}$	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^4-4x^3+7x^2-12x+12}{x^2-5x+6}$	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x^2+x+1}{x-1}+\frac{5x-2}{x^2-3x+2}\right)$
$\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2+2x+10}-x-2}{x^2-4x+3}$	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3x+5}+x-4}{\sqrt[3]{x}-x}$	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x^2+3x+5}+\sqrt{x^2+x+2}-3x-2}{x^2-1}$
$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2+x+2}+\sqrt{x^2+3x+6}-x^2+x-4}{x^2-3x+2}$	$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{2\eta\mu^3x-\eta\mu^2x+2\eta\mu x-1}{2\eta^3x-\eta\mu^2x+4\eta\mu x-2}$	$\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{x-1}{x^2-x-2}+\frac{3x-7}{3(x^2-3x+2)}\right)$

II. Εφαρμογή των ιδιοτήτων:

1. Αν $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 5$ και $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = -2$, να δείξετε ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί α,β ώστε: $f(\alpha)\cdot f(\beta) < 0$

<u>Υπόδειξη</u> : Αφού $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 5 > 0$ υπάρχει περιοχή του 1 δηλ. (1-δ , 1+δ) , δ>0 ώστε: f(x)>0 για κάθε x∈ (1-δ , 1+δ). Άρα υπάρχει α∈ (1-δ , 1+δ) : f(α)>0

Όμοια προκύπτει ότι υπάρχει β∈ (1-δ΄ , 1+δ΄) με δ΄>0: f(β)<0. Επομένως υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί α , β ώστε: f(α)f(β)<0

2. Αν για τη συνάρτηση $f: R \to R$ ισχύει: $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 1$, να βρείτε τα όρια:

$\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-\sqrt{2-f(x)}}{\sqrt{f(x)}-1}$ και $\lim\limits_{x\to 3}\frac{|f^2(x)-3f(x)|-2}{f(x)-1}$

<u>Υπόδειξη</u> :

www.aris-nikolaidis.tk

- ✓ Αφού $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=1$ υπάρχει περιοχή του 3, (3-δ , 3+δ) με δ>0 ώστε $\frac{1}{2}<f(x)<\frac{3}{2}$ για κάθε x∈ (3-δ , 3+δ) και επομένως f(x)>0 και f(x)<2 για κάθε x∈ (3-δ , 3+δ). Έτσι:

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-\sqrt{2-f(x)}}{\sqrt{f(x)}-1}=\lim_{x\to 3}\frac{[f^2(x)+f(x)-2]\cdot[\sqrt{f(x)}+1]}{[f(x)+\sqrt{2-f(x)}]\cdot[f(x)-1]}=\lim_{x\to 3}\frac{[f(x)+2]\cdot[\sqrt{f(x)}+1]}{f(x)+\sqrt{2-f(x)}}=3$$

- ✓ Αφού $\lim\limits_{x\to 3}[f^2(x)-3f(x)]=-2$ υπάρχει κ>0 ώστε: $f^2(x)-3f(x)<0$ για κάθε x∈ (3-κ , 3+κ) και συγχρόνως να είναι f(x)>0 (αρκεί να εκλέξουμε κ ≤ δ). Άρα

$$\lim_{x\to 3}\frac{|f^2(x)-3f(x)|-2}{f(x)-1}=\lim_{x\to 3}\frac{-f^2(x)+3f(x)-2}{f(x)-1}=-\lim_{x\to 3}\frac{[f(x)-1]\cdot[f(x)-2]}{f(x)-1}=1$$

3. Αν $f,g:R - R$ με f(x)g(x)>0 για κάθε x∈ R ,

$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=k\in R$ και $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{f(x)-g(x)}{f(x)+g(x)}=0$, να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=k$

<u>Υπόδειξη</u> : $h(x)=\frac{f(x)-g(x)}{f(x)+g(x)}\Rightarrow\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{1+h(x)}{1-h(x)}\Rightarrow f(x)=\frac{1+h(x)}{1-h(x)}\cdot g(x)\Rightarrow ......$

4. Δίνεται η συνάρτηση f|R με $\lim\limits_{x\to 2}[f(x)+x^2-x+2]=3$. Να υπολογίσετε το

$$\lim_{x\to 2}\frac{f^2(x)-2f(x)-3}{f^2(x)-1}$$

<u>Υπόδειξη</u> : Θέτουμε $g(x)=f(x)+x^2-x+2\ ,\ x\in R$. Έτσι $f(x)=g(x)-x^2+x-2$ και $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=3$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=......=-1$. Επομένως $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f^2(x)-2f(x)-3}{f^2(x)-1}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{[f(x)+1][f(x)-3]}{[f(x)+1][f(x)-1]}=......=2$

5. Αν $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=1$ και $\lim\limits_{x\to 2}[g(x)(2x^2+3x-14)]=11$, να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 2}[f(x)\cdot g(x)]$

<u>Υπόδειξη</u> : Θέτουμε $h(x)=\frac{f(x)}{x-2}\ ,\ x\neq 2$ και $\varphi(x)=g(x)(2x^2+3x-14)\ ,\ x\in R$. Τότε

$\lim\limits_{x\to 2} h(x)=1$ και $\lim\limits_{x\to 2}\varphi(x)=11$. Έτσι $f(x)=(x-2)h(x)$ και $g(x)=\frac{\varphi(x)}{2x^2+3x-14}\Rightarrow f(x)g(x)=......$

6. Αν για τη συνάρτηση f|R ισχύει: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)+x}{x-1}=2$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f^2(x)-f(x)-2}{\sqrt{f^2(x)+3}-2x}$

<u>Υπόδειξη</u> : Θέτουμε $g(x)=\frac{f(x)+x}{x-1}$, $x\in R-\{1\}$ οπότε $\lim\limits_{x\to1}g(x)=2$ και $f(x)=(x-1)g(x)-x$ και άρα $\lim\limits_{x\to1}f(x)=-1$. Το ζητούμενο όριο είναι:

$$\lim_{x\to1}\frac{f^2(x)-f(x)-2}{\sqrt{f^2(x)+3}-2x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to1}\frac{f^2(x)-f(x)-2}{f^2(x)+3-4x^2}\left(\sqrt{f^2(x)+3}+2x\right)=\text{αντικαθιστώντας την } f(x)=\frac{6}{5}$$

III. <u>Παραμετρικά όρια</u> :

1. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α , β ώστε: $\lim\limits_{x\to1}\frac{\alpha x^2-(\beta+3)x+2\alpha+\beta}{x^2-4x+3}=2$

<u>Υπόδειξη</u> : Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\frac{\alpha x^2-(\beta+3)x+2\alpha+\beta}{x^2-4x+3}$ | $D_f=R-\{1,3\}$

και έχουμε: $\alpha x^2-(\beta+3)x+2\alpha+\beta=(x^2-4x+3)f(x)$ =

$\lim\limits_{x\to1}[\alpha x^2-(\beta+3)x+2\alpha+\beta]=\lim\limits_{x\to1}[(x^2-4x+3)f(x)]=0$ = 3α-3=0 = α=1

Για α=1 η συνάρτηση γίνεται: $f(x)=......=\frac{x-\beta-2}{x-3}\Rightarrow\lim\limits_{x\to1}f(x)=\frac{\beta+1}{2}$ = β=3

2. Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\alpha\in R$ ώστε το

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+(\alpha-1)x-5\alpha+\sqrt{x^2+3x+6}}{x-2}\text{ να είναι πραγματικός αριθμός.}$$

<u>Υπόδειξη</u> : Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2+(\alpha-1)x-5\alpha+\sqrt{x^2+3x+6}}{x-2}$ | $D_f=R-\{2\}$. Αν $\lim\limits_{x\to2}f(x)=k\in R$ τότε

$$x^2+(\alpha-1)x-5\alpha+\sqrt{x^2+3x+6}=(x-2)f(x)\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to2}[x^2+(\alpha-1)x-5\alpha+\sqrt{x^2+3x+6}]=\lim_{x\to2}(x-2)\cdot\lim_{x\to2}f(x)=0\Leftrightarrow6-3\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=2$$

Πρέπει <u>υποχρεωτικά</u> να ελέγξουμε αν για α=2 το $\lim\limits_{x\to2}f(x)\in R$. Έχουμε:

$$f(x)=\frac{x^2+x-10+\sqrt{x^2+3x+6}}{x-2}=\frac{x^2+x-6}{x-2}+\frac{\sqrt{x^2+3x+6}-4}{x-2}=x+3+\frac{x+5}{\sqrt{x^2+3x+6}+4}$$, άρα

$\lim\limits_{x\to2}f(x)=\frac{47}{8}\in R$.

IV. Τριγωνομετρικά όρια:

1. Να υπολογίσετε τα όρια: $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 5x-\eta\mu 3x}{\sqrt{1+x}-1}$, $B=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varepsilon\varphi 2x-\varepsilon\varphi x}{x}$

Υπόδειξη :

✓ $$A=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 5x-\eta\mu 3x}{\sqrt{1+x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 5x-\eta\mu 3x}{x}\cdot\left(\sqrt{1+x}+1\right)=$$
$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(5\frac{\eta\mu 5x}{5x}-3\frac{\eta\mu 3x}{3x}\right)\cdot\left(\sqrt{1+x}+1\right)\right]=\ldots\ldots=4$$

✓ $$B=\lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon\varphi 2x-\varepsilon\varphi x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\varepsilon\varphi 2x}{x}-\frac{\varepsilon\varphi x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu 2x}{x\sigma\upsilon\nu 2x}-\frac{\eta\mu x}{x\sigma\upsilon\nu x}\right)=\ldots\ldots=2-1=1$$

2. Αν $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=9$ **, να βρεθεί το** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^4f(x)}-\eta\mu^2x}{x^2+\eta\mu^2x}$

Υπόδειξη : $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^4f(x)}-\eta\mu^2x}{x^2+\eta\mu^2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\left[\sqrt{f(x)}-\left(\frac{\eta\mu\ x}{x}\right)^2\right]}{x^2\cdot\left[1+\left(\frac{\eta\mu\ x}{x}\right)^2\right]}=\ldots\ldots=1$$

V. Κριτήριο σύγκρισης ή παρεμβολής:

1. Αν για τη συνάρτηση f|R ισχύει: $2x\eta\mu x+f^2(x)\le 2xf(x)+\eta\mu^2x$, $\gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in R$

να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0 δηλ. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$

Υπόδειξη :

$$2x\eta\mu x+f^2(x)\le 2xf(x)+\eta\mu^2x\Leftrightarrow f^2(x)-2xf(x)\le\eta\mu^2x-2x\eta\mu x\ \Leftrightarrow$$

$$f^2(x)-2xf(x)+x^2\le\eta\mu^2x-2x\eta\mu x+x^2\ \Leftrightarrow(f(x)-x)^2\le(\eta\mu x-x)^2\ \Leftrightarrow|f(x)-x|\le|\eta\mu x-x|$$

Αλλά $\lim\limits_{x\to 0}(\eta\mu x-x)=0$ και άρα: $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)-x)=0$. Έτσι αν θέσουμε $g(x)=f(x)-x$ θα είναι

$\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$ $\kappa\alpha\iota$ $f(x)=g(x)+x$, άρα $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}[g(x)+x]=0$

2. Αν για τη συνάρτηση f|R ισχύει:

$2xf(x)+\eta\mu^2 x \le f^2(x) \le \eta\mu^2 x + x(x+2f(x))$, για κάθε $x \in R$ να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0 δηλ. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$

<u>Υπόδειξη</u> :

$$2xf(x)+\eta\mu^2 x \le f^2(x) \le \eta\mu^2 x + x(x+2f(x)) \Leftrightarrow \eta\mu^2 x + x^2 \le f^2(x) - 2xf(x) + x^2 \le \eta\mu^2 x + 2x^2$$
$$\Leftrightarrow \eta\mu^2 x + x^2 \le (f(x) - x)^2 \le \eta\mu^2 x + 2x^2$$

Όμως $\lim\limits_{x\to 0}(\eta\mu^2 x + x^2) = \lim\limits_{x\to 0}(\eta\mu^2 x + 2x^2) = 0$ και επομένως

$\lim\limits_{x\to 0}(f(x)-x)^2 = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0}(f(x)-x) = 0$ Θέτουμε $g(x) = f(x) - x$, $x \in R$ ......

3. Αν για τη συνάρτηση f|R ισχύει:

$4x\sqrt{x^2+3} \le (x-1)f(x) + 8x \le 5x^2 + 3$, $x, y \in R$, να βρείτε το

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)f(x)+\eta\mu\pi x}{x^2-3x+2}$$

<u>Υπόδειξη</u> : Η δοσμένη σχέση γράφεται: $4x\sqrt{x^2+3} - 8x \le (x-1)f(x) \le 5x^2 - 8x + 3$

- ✓ Αν x>1 τότε $\dfrac{4x\sqrt{x^2+3}-8x}{x-1} \le f(x) \le \dfrac{5x^2-8x+3}{x-1} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \dfrac{4x(x+1)}{\sqrt{x^2+3}+2} \le f(x) \le 5x-3$

  ......

- ✓ Αν x>1 τότε $\dfrac{4x\sqrt{x^2+3}-8x}{x-1} \ge f(x) \ge \dfrac{5x^2-8x+3}{x-1} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \dfrac{4x(x+1)}{\sqrt{x^2+3}+2} \ge f(x) \ge 5x-3$

  ......

VI. Αλλαγή μεταβλητής:

1. Αν η συνάρτηση f|Rικανοποιεί τη σχέση $- 2y) = f(x) - f(2y) - 2xy$, $x, y \in R$ και $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$, να αποδειχθεί ότι $\lim\limits_{x\to 2006} f(x) = f(2006)$. Γενικότερα δείξτε ότι: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Υπόδειξη : Για x=y=0 προκύπτει ότι: f(0)=0 , οπότε $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$. Θέτουμε

$x - 2006 = -2h \Leftrightarrow x = 2006 - 2h$ και $h \to 0$. Έτσι

$$\lim_{x\to 2006} f(x) = \lim_{h\to 0} f(2006 - 2h) = \lim_{h\to 0}[f(2006) - f(2h) - 2\cdot 2006\cdot h] = \ldots\ldots = f(2006)$$

2. Αν η συνάρτηση f|R έχει την ιδιότητα $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy \quad , \quad x, y \in R$ και $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = k^2$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to -\alpha} f(x)$

Υπόδειξη : Για x=y=0 προκύπτει ότι: f(0)=0 και για y= - x έχουμε f(x)+f(-x) = $2x^2$. Έτσι

$$\lim_{x\to -\alpha} f(x) = \lim_{y\to\alpha} f(-y) = \lim_{y\to\alpha}[2y^2 - f(y)] = 2\alpha^2 - \lim_{y\to\alpha} f(y) = 2\alpha^2 - \alpha^2 = \alpha^2$$

3. Αν για τη συνάρτηση f|R ισχύει: $f(x+y) = f(x)\sigma\upsilon\nu 2y + f(y)\sigma\upsilon\nu 2x \quad , \quad x \in R$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 1$, να δείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x-\alpha} = \sigma\upsilon\nu 2\alpha \quad , \quad \gamma\iota\alpha\ \ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \ \alpha \in R$

Υπόδειξη : Θέτουμε $x - \alpha = h \Leftrightarrow x = \alpha + h$ και $h \to 0$

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x) - f(\alpha)}{x-\alpha} = \lim_{h\to 0}\frac{f(\alpha+h) - f(\alpha)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(\alpha)\sigma\upsilon\nu 2h + f(h)\sigma\upsilon\nu 2\alpha - f(\alpha)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(\alpha)(\sigma\upsilon\nu 2h - 1)}{h} + \frac{f(h)}{h}\sigma\upsilon\nu 2\alpha\right] = -f(\alpha)\lim_{h\to 0}\frac{2\eta\mu^2 h}{h} + \sigma\upsilon\nu 2\alpha\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h} = \ldots\ldots = \sigma\upsilon\nu 2\alpha$$

VII. Σύνθεση συναρτήσεων (δηλ. αντικατάσταση):

1. Υπολογίστε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x - \sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x}}{x + \sqrt{x} + \sqrt[6]{x}}$

Υπόδειξη : Θέτουμε $\sqrt[6]{x} = y \quad (x > 0)$, οπότε: $x = y^6$, $\sqrt[3]{x} = y^2$, $\sqrt{x} = y^3$ και

$x \to 0 \Rightarrow y \to 0$. Έτσι έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x - \sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x}}{x + \sqrt{x} + \sqrt[6]{x}} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y^6 - y^2 + y}{y^6 + y^3 + y} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{y\cdot(y^5 - y + 1)}{y\cdot(y^5 + y^2 + 1)} = 1$

2. Αν $f(x) = \dfrac{\eta\mu(1+\sigma\upsilon\nu x)}{(x-\pi)^2}$, να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to\pi} f(x)$

Υπόδειξη : Θέτουμε: $x - \pi = y$ οπότε $x = \pi + y$ και $y \to 0$. Έτσι

$$\lim_{x\to\pi} f(x) = \lim_{y\to 0}\frac{\eta\mu(1+\sigma\upsilon\nu(\pi+y))}{y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{\eta\mu(1-\sigma\upsilon\nu y)}{y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{\eta\mu(1-\sigma\upsilon\nu y)}{1-\sigma\upsilon\nu y}\cdot\frac{1-\sigma\upsilon\nu y}{y^2}.$$

Όμως $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\etaμ(1-συνy)}{1-συνy}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{ημt}{t}=1$ και $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1-συνy}{y^2}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{2ημ^2\frac{y}{2}}{4(\frac{y}{2})^2}=......=\dfrac{1}{2}$

3. Αν $L_n=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-συνx\cdot συν2x\cdot ...\cdot συνnx}{x^2}\ ,\ n\in N^*$, να δείξετε ότι:

- ✓ $L_1=\dfrac{1}{2}$ και $L_n=L_{n-1}+\dfrac{n^2}{2}$
- ✓ $L_n=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{12}\ ,$ για κάθε $n\in N^*$

<u>Υπόδειξη</u> :

✓

$$L_1=\lim_{x\to 0}\frac{1-συνx}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2ημ^2\frac{x}{2}}{4(\frac{x}{2})^2}=\frac{2}{4}\cdot\lim_{x\to 0}\left[\frac{ημ\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right]^2=\frac{1}{2}$$

$$L_n=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1-συνx\cdot συν2x\cdot ...συν(n-1)x}{x^2}\cdot συνnx+\frac{1-συνx}{x^2}\right]=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-συνx\cdot συν2x\cdot ...συν(n-1)x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}συνnx+\lim_{x\to 0}\frac{2ημ^2\frac{nx}{2}}{x^2}=$$

$$L_{n-1}+\frac{2n^2}{4}\lim_{x\to 0}\left(\frac{ημ\frac{nx}{2}}{\frac{nx}{2}}\right)^2-L_{n-1}+\frac{n^2}{2}$$

✓

$$\left.\begin{array}{l} L_2=L_1+\dfrac{2^2}{2}\\ L_3=L_2+\dfrac{3^2}{2}\\ L_4=L_3+\dfrac{4^2}{2}\\ ....\\ L_n=L_{n-1}+\dfrac{n^2}{2}\end{array}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow}L_n=L_1+\frac{1}{2}\cdot(1^2+2^2+....+n^2)=....$$

✓

VIII. Απόλυτες τιμές ή πολλαπλός τύπος της συνάρτησης

1. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\lvert x^2-1\rvert-x-1}{\lvert x+5\rvert-2x-3}$	$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\lvert x^2-9\rvert+\lvert x-3\rvert}{\lvert x+2\rvert-5}$	$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\lvert x+2\rvert+\lvert x-1\rvert-x^2+2x}{x^2+4x+3}$

$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+\etaμx}{x^2-\etaμx} & , \; x<0 \\ α - \text{συν}\dfrac{1}{x} & , \; x>0 \end{cases}$ Να βρείτε το $α \in R$, ώστε να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$	$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-3}{x^2-1}+\dfrac{1}{x-1} & , \; x<1 \\ \dfrac{3\sqrt{x^2+3}-6}{x-1} & , \; x>1 \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = ;$	$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-2x+1}{x-1} & , \; x<1 \\ \dfrac{x^3-1}{x-1}-2 & , \; x>1 \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = ;$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{α|1-x^2|+β|9-x^2|-3x-7}{x^2-4}$. Να βρείτε τα α , β∈ R

ώστε $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -\dfrac{7}{4}$

$\underline{2^η \text{ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ}}$: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty \quad , \quad x_0 \in R$

I. Μορφή $\left(\dfrac{α}{0}\right)$, $α \neq 0$:

1. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x}{x^3-3x^2+3x-1}$	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-3}{x^2+x-2\sqrt{x^3}}$	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2^x-5^x}{2^x+3^x-10}$
$\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x-5}{x-6\sqrt{x}+9}$	$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-x+1}{x-4\sqrt{x}+4}$	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}-3x+3\sqrt{x}-1}$

2. Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση f με f(3)=6, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$xf(x-1)=(x-3)f(x) \; , \; x \in R$.

✓ Να προσδιορίσετε τον τύπο της f.

✓ Να βρείτε το όριο: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x^3-3x^2+3x-1}$

<u>Υπόδειξη</u> :

✓ Θέτοντας x=0 , x=3 , x=1, βρίσκουμε : f(0)=0 , f(2)=0 , f(1)=0 και άρα

$$f(x)=x(x-1)(x-2)g(x) \; , \; x \in R$$

Προσδιορισμός της g :

$x f(x-1)=(x-3)f(x) \Leftrightarrow x(x-1)(x-2)(x-3)g(x-1)=(x-3)x(x-1)(x-2)g(x)$ για κάθε $x \in R$ και επομένως g(x)=g(x-1). Έτσι: g(1)=g(0) , g(2)=g(1)=g(0) και γενικά g(ν)=g(0) για κάθε $\nu \in N^*$. Άρα g(x)=g(0)=α , οπότε f(x)=αx(x-1)(x-2) και από τη σχέση f(3)=6 προκύπτει α=1.

✓ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x^3-3x^2+3x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x-1)(x-2)}{(x-1)^3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}=-\infty$

II. Απροσδιόριστες μορφές:

1. Αν οι συναρτήσεις f , g είναι ορισμένες στο R και $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}g(x)=-\infty$, να δείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)+g(x)}{f^3(x)+g^3(x)}=0$

2. Θεωρούμε τη συνάρτηση f|R με $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)+1}{f(x)-1}=+\infty$. Να δείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=1$

3. Δίνονται οι συναρτήσεις f , g|R με f(x)>0 και g(x)>0 για κάθε $x\in R$. Αν $\lim\limits_{x\to \alpha}f(x)=\lim\limits_{x\to \alpha}g(x)=0$, να δείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to \alpha}\dfrac{f^2(x)+g^2(x)}{f^3(x)+g^3(x)}=+\infty$

<u>Υπόδειξη</u> : Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\dfrac{f^2(x)+g^2(x)}{f^3(x)+g^3(x)}$, $x\in R$ και έχουμε:

$0\le h(x)=\dfrac{f^3(x)}{f^2(x)+g^2(x)}+\dfrac{g^3(x)}{f^2(x)+g^2(x)}\le\dfrac{f^3(x)}{f^2(x)}+\dfrac{g^3(x)}{g^2(x)}=f(x)+g(x)$ για κάθε $x\in R$. Όμως

$\lim\limits_{x\to \alpha}[f(x)+g(x)]=0 \;=\; \lim\limits_{x\to \alpha}h(x)=0$ και επειδή h(x) > 0 θα είναι:

$\lim\limits_{x\to \alpha}\dfrac{1}{h(x)}=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to \alpha}\dfrac{f^2(x)+g^2(x)}{f^3(x)+g^3(x)}=+\infty$

III. Παραμετρικά όρια :

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-(\lambda+3)x+\lambda^2}{x^4-4x^3+6x^2-4x+1}$, $\lambda\in R$. Να υπολογίσετε για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in R$, το $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$

Υπόδειξη: $\lim\limits_{x\to 1}[x^2-(\lambda+3)x+\lambda^2]=\lambda^2-\lambda-2$ και άρα έχουμε μορφή $(\frac{\lambda^2-\lambda-2}{0})$. Έτσι:

- ✓ Αν $\lambda\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$ τότε $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=+\infty$
- ✓ Αν $\lambda\in(-1,2)$ τότε $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=-\infty$
- ✓ Αν λ=-1 τότε $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=+\infty$
- ✓ Αν λ=2 ....(πλευρικά όρια)

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+\alpha^2}{x^2-2\alpha x+1}$, $\alpha\in R$. Για ποιες τιμές του α$\in R$ είναι $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=+\infty$;

Υπόδειξη: Προφανώς η f ορίζεται σε περιοχή του 1 και μάλιστα $f(x)\neq 0$. Έτσι

$x^2-2\alpha x+1=\dfrac{x^2+\alpha^2}{f(x)}$, οπότε $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-2\alpha x+1)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+\alpha^2}{f(x)}=0$. Άρα $1-2\alpha+1=0\Leftrightarrow\alpha=1$

Για α=1 είναι $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-2x+1}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+1}{x^2-2x+1}=...+\infty$ Άρα α=1

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+\alpha^2}-\alpha}{\sqrt{\beta^2-x^2}-\beta}$, $\alpha,\beta\in R$. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

Υπόδειξη: Το όριο έχει τη μορφή $\left(\dfrac{|\alpha|-\alpha}{|\beta|-\beta}\right)$. Έτσι έχουμε τις περιπτώσεις:

- ✓ Αν $|\beta|-\beta\neq 0\Leftrightarrow|\beta|\neq\beta\Leftrightarrow\beta<0$, τότε $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=...=\dfrac{\alpha-|\alpha|}{2\beta}$
- ✓ Αν $|\beta|-\beta=0\Leftrightarrow|\beta|=\beta\Leftrightarrow\beta>0$, τότε

Αν $|\alpha|-\alpha\neq 0\Leftrightarrow\alpha<0$ έχουμε τη μορφή $\left(\dfrac{-2\alpha}{0}\right)$ και επειδή $\sqrt{\beta^2-x^2}-\beta=\dfrac{-x^2}{\sqrt{\beta^2-x^2}+\beta}<0$

είναι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\infty$

Αν $|\alpha|-\alpha=0\Leftrightarrow\alpha>0$ έχουμε τη μορφή $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ και άρα : $f(x)=\dfrac{\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+\alpha^2}+\alpha}}{\dfrac{-x^2}{\sqrt{\beta^2-x^2}+\beta}}=...\to-\dfrac{\beta}{\alpha}$

4. Αν $f(x)=\dfrac{x^2-\lambda^2 x+3}{x^2-1}$, $\lambda \in R$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

5. Αν $f(x)=\dfrac{\lambda x^2-\lambda^2 x+12}{x^2-6x+9}$, $\lambda \in R$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

IV. Κριτήριο σύγκρισης ή παρεμβολής:

1. Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα Δ=(-1 , 1) ώστε

$x^2 f(x) \geq x^2+x+1$ για κάθε $x \in \Delta$ με $x \neq 0$. Να βρείτε το

$\lim\limits_{x\to 0}[\sqrt{f^2(x)+2f(x)+3}-f(x)]$

Υπόδειξη: $x^2 f(x) \geq x^2+x+1 \Leftrightarrow f(x) \geq \dfrac{x^2+x+1}{x^2}$, $x \neq 0$. Όμως $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x+1}{x^2}=+\infty$ και άρα

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$. Έτσι

$$\lim_{x\to 0}[\sqrt{f^2(x)+2f(x)+3}-f(x)]=\lim_{x\to 0}\frac{f^2(x)+2f(x)+3-f^2(x)}{\sqrt{f^2(x)+2f(x)+3}+f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2+\dfrac{3}{f(x)}}{\sqrt{1+\dfrac{2}{f(x)}+\dfrac{3}{f^2(x)}}+1}=1$$

2. Δίνονται οι συναρτήσεις f , g|R με

$(x-2)^2 f(x) \geq x+3$ και $|x-1|\,g(x) \leq x-5$, $x \in R$. Να βρείτε τα

$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$

Υπόδειξη: Έχουμε $f(x) \geq \dfrac{x+3}{(x-2)^2}$, $x \neq 0$ και $g(x) \leq \dfrac{x-5}{|x-1|}$, $x \neq 1$. Όμως

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+3}{(x-2)^2}=+\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-5}{|x-1|}=-\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} g(x)=-\infty$

V. Απόλυτες Τιμές ή πολλαπλός τύπος της συνάρτησης:

1. Αν $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-3\alpha x+3\alpha^2}-\alpha}{|x|-\alpha}$, $\alpha\in R$, να βρείτε για τις διάφορες τιμές του α, το $\lim\limits_{x-\alpha} f(x)$

Υπόδειξη: Έχουμε:

- ✓ Αν α<0 τότε: $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{\sqrt{x^2-3\alpha x+3\alpha^2}-\alpha}{|x|-\alpha}=\dfrac{-2\alpha}{-2\alpha}=1$
- ✓ Αν α=0 τότε: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2}}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{|x|}=1$
- ✓ Αν α>0 τότε:

$$\lim_{x\to\alpha} f(x)=\lim_{x\to\alpha}\frac{\sqrt{x^2-3\alpha x+3\alpha^2}-\alpha}{|x|-\alpha}=\lim_{x\to\alpha}\frac{x^2-3\alpha x+2\alpha^2}{[|x|-\alpha][\sqrt{x^2-3\alpha x+3\alpha^2}+\alpha]}=$$
$$\lim_{x\to\alpha}\frac{[x-\alpha][x-2\alpha]}{[x-\alpha][\sqrt{x^2-3\alpha x+3\alpha^2}+\alpha]}=-\frac{1}{2}$$

2. Αν $f(x)=\dfrac{3x^2-\lambda^2x-4}{|x-2|}$, $\lambda\in R$, βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

Υπόδειξη: Έχουμε: $|x-2|f(x)=3x^2-\lambda^2x-4 \Rightarrow \lim\limits_{x-2}(3x^2-\lambda^2x-4)=0 \Leftrightarrow \lambda=\pm 2$

- ✓ Αν $\lambda\in(-2,2)$ τότε $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=+\infty$
- ✓ Αν $\lambda\notin(-2,2)$ τότε $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=-\infty$
- ✓ Αν λ=2 ή λ=-2 τότε δεν υπάρχει το όριο

3.

3η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=k\in R\cup\{\pm\infty\}$

VI. Απροσδιοριστία:

1. Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{4x^2+4x+3}-\sqrt{9x^2+6x+2}]$

Υπόδειξη: Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το R και αφού $x\to+\infty$ μπορούμε να θεωρήσουμε x>0. Επειδή $\sqrt{x^2}+\sqrt{4x^2}-\sqrt{9x^2}=|x|+2|x|-3|x|=0$, έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $0\cdot(+\infty)$. Έτσι:

$$f(x)=[\sqrt{x^2+2x+3}-x]+[\sqrt{4x^2+4x+3}-2x]-[\sqrt{9x^2+6x+2}-3x]=$$

$$=\frac{x^2+2x+3-x^2}{\sqrt{x^2+2x+3}+x}+\frac{4x^2+4x+3-4x^2}{\sqrt{4x^2+4x+3}+2x}+\frac{9x^2+6x+2-9x^2}{\sqrt{9x^2+6x+2}+3x}=$$

$$=\frac{2+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1}+\frac{4+\frac{3}{x}}{\sqrt{4+\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}+2}+\frac{6+\frac{2}{x}}{\sqrt{9+\frac{6}{x}+\frac{2}{x^2}}+3}$$

Άρα: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

2. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}[\sqrt{x^2+2x+3}+x-2]$

Υπόδειξη: Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το R και αφού $x\to-\infty$ μπορούμε να θεωρήσουμε x<0. Επειδή $\sqrt{x^2}+x=-x+x=0$, βγάζοντας κοινό παράγοντα, έχουμε απροσδιοριστία της μορφής $0\cdot(+\infty)$. Έτσι:

$$f(x)=[\sqrt{x^2+2x+3}+x-2]=\frac{x^2+2x+3-x^2}{\sqrt{x^2+2x+3}-x}-2=\frac{x\left(2+\frac{3}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1\right)}-2=-\frac{2+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1}-2\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-3$$

VII. Παραμετρικά όρια :

1. Αν $f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-2x+4}+4x\text{συνθ}+1$, να βρείτε τις τιμές του $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ώστε το $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ να είναι πεπερασμένο.

Υπόδειξη: Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το R και αφού $x\to-\infty$ μπορούμε να θεωρήσουμε x<0. Έτσι:

$$f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-2x+4}+4x\text{συνθ}+1=-x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}-4\text{συνθ}-\frac{1}{x}\right)$$

Όμως $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}-4\text{συνθ}-\frac{1}{x}\right)=2(1-2\text{συνθ})$

✓ Αν $1-2\sigma\upsilon\nu\theta>0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta<\frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \lim\limits_{\chi\to-\infty} f(x)=+\infty$

✓ Αν $1-2\sigma\upsilon\nu\theta<0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta>\frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \lim\limits_{\chi\to-\infty} f(x)=-\infty$

✓ Αν $1-2\sigma\upsilon\nu\theta=0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{3}$, τότε:

$$f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}+\sqrt{x^2-2x+4}+2x+1=\left(\sqrt{x^2+2x+3}+x\right)+\left(\sqrt{x^2-2x+4}+x\right)+1=$$

$$=-\frac{2+\frac{3}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}+1}+\frac{2-\frac{2}{x}}{\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}}+1}+1$$

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$

2. Να βρείτε το πολυώνυμο P(x) αν είναι γνωστό ότι: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{P(x)}{x^2-2x+1}=3$ και

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{P(x)}{x^2-2x+1}=3$ για κάθε $x_0\in R$.

<u>Υπόδειξη</u>: Προφανώς το P(x) είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού (;) και έστω ότι έχει τη μορφή $P(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$. Τότε:

$$\lim_{\chi\to-\infty}\frac{P(x)}{x^2-2x+1}=\lim_{\chi\to-\infty}\frac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{x^2-2x+1}=\alpha \quad \text{και} \quad \text{άρα} \quad \alpha=3$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-2x+1)=0$ και $\lim\limits_{x\to 1}\frac{P(x)}{x^2-2x+1}\in R$, πρέπει

$\lim\limits_{x\to 1}P(x)=0 \Leftrightarrow 3+\beta+\gamma=0 \Leftrightarrow \gamma=-\beta-3$

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{P(x)}{x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2+\beta x-\beta-3}{(x-1)^2}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{3(x+1)+\beta}{x-1}$. Πρέπει ξανά

$\lim\limits_{x\to 1}[3(x+1)+\beta]=0 \Leftrightarrow \beta=-6$ και το όριο είναι 3. Άρα α=3 , β=-6 , γ=3.

VIII. Τριγωνομετρικά όρια:

1. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2-\eta\mu x}{x^2-\sigma\upsilon\nu x}$

Υπόδειξη: Η f ορίζεται στο $(2\ ,+\infty\ )$ και άρα έχει έννοια το όριο. Έτσι:

$$f(x)=\frac{x^2(2-\frac{\eta\mu x}{x^2})}{x^2(1+\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2})}=\frac{2-\frac{\eta\mu x}{x^2}}{1+\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}}$$. Όμως $|\frac{\eta\mu x}{x^2}|\le\frac{1}{x^2}$ και $|\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}|\le\frac{1}{x^2}$ και επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$

θα έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^2}=0$. Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$

IX. Κριτήριο σύγκρισης ή παρεμβολής:

1. Δίνονται οι συναρτήσεις f , g|R με $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1$. Αν η g είναι φραγμένη, να δείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$.

Υπόδειξη: Αφού η g είναι φραγμένη, θα υπάρχει Μ>0 ώστε |g(x)|≤0 για κάθε x$\in$ R. Έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}-1\right)=0\Leftrightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-g(x)}{g(x)}=0.$$

Θέτουμε $\frac{f(x)-g(x)}{g(x)}=h(x)\ \Rightarrow\ \lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=0$ και $f(x)-g(x)=g(x)h(x)\ ,\ x\in R$ και επομένως

$|f(x)-g(x)|=|g(x)||h(x)|\le M|h(x)|\ ,\ x\in R$. Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}Mh(x)=0\ =\ \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$.

2. Αν η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ είναι φραγμένη και έχει την ιδιότητα $(\sqrt{x}+\sqrt{y})f(xy)=xf(y)+yf(x)\ ,\ x,y>0$, να δείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

Υπόδειξη: Για y=x έχουμε …. $f(x)=\frac{f(x^2)}{\sqrt{x}}$ για κάθε $x\in R$. Επειδή η f είναι φραγμένη υπάρχει

Μ>0 ώστε: $|f(x)|\le M$ για κάθε $x>0\ \Rightarrow\ |f(x^2)|\le M\ ,\ x>0$. Άρα $f(x)=\frac{f(x^2)}{\sqrt{x}}\le\frac{M}{\sqrt{x}}$ και επειδή

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{M}{\sqrt{x}}=0\ \Rightarrow\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=0$$

3. Δίνονται οι συναρτήσεις f , g|R για τις οποίες ισχύει: $x[f^2(x)+g^2(x)]\le 2f(x)$ για κάθε $x\in R$. Να αποδείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$

<u>Υπόδειξη</u>: Αφού $x \to +\infty$ μπορούμε να θεωρήσουμε x>0 και έτσι:

$$x[f^2(x)+g^2(x)] \le 2f(x) \Leftrightarrow f^2(x)+g^2(x)-2\frac{f(x)}{x} \le 0 \Leftrightarrow [\,f(x)-\frac{1}{x}]^2+g^2(x) \le \frac{1}{x^2} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le [\,f(x)-\frac{1}{x}]^2 \le \frac{1}{x^2} \\ 0 \le g^2(x) \le \frac{1}{x^2} \end{cases}$$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\frac{1}{x}]=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$ και άρα

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}[(f(x)-\frac{1}{x})+\frac{1}{x}]=0$$

Χ. Αλλαγή μεταβλητής:

1. Αν η μη σταθερή συνάρτηση f|R έχει την ιδιότητα:

$f(x+y)=2f(x)f(y)\ ,\ x,y\in R$, να δείξετε ότι:

✓ $\quad 0$ για κάθε $x\in R$

✓ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

<u>Υπόδειξη</u>:

✓ Για x=y=0 από την υπόθεση προκύπτει: $f(0)=2f^2(0) \Leftrightarrow f(0)=0$ ή $f(0)=\frac{1}{2}$. Έτσι αν f(0)=0 τότε για y=0 έχουμε f(x)=0 δηλ. η f είναι σταθερή , άτοπο. Επομένως $f(0)=\frac{1}{2}$

Για $x=y=\frac{t}{2} \Rightarrow f(t)=2f^2(\frac{t}{2})\ge 0$

Αν υποθέσουμε τώρα ότι υπάρχει κ ώστε f(κ)=0, τότε:

$f(x)=f[(x-\kappa)+\kappa]=2f(x-\kappa)f(\kappa)=0$ για κάθε $x\in R$, άτοπο. Επομένως $f(x)>0$ για κάθε $x\in R$.

✓ Για y=-x προκύπτει $f(x)f(-x)=\frac{1}{4} \Leftrightarrow f(-x)=\frac{1}{f(x)}$

Αν $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ τότε: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{y\to-\infty}f(-y)=\lim\limits_{y\to-\infty}\frac{1}{4f(y)}=+\infty$, αφού $f(y)>0$ και $\lim\limits_{y\to-\infty}f(y)=0$

Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ τότε: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}f(-y)=\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{1}{4f(y)}=0$