Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

Ο Ρ Ι Α & Ο Λ Ο Κ Λ Η Ρ Ω Μ Α

Άσκηση 1

Έστω $f(x)=\frac{1}{x^2}\cdot\int_0^x(\sqrt{t}+\sigma\upsilon\nu 2t)dt$. Να δείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

Υπόδειξη:

$$|f(x)|=\left|\frac{1}{x^2}\cdot\int_0^x(\sqrt{t}+\sigma\upsilon\nu 2t)dt\right|=\left|\frac{1}{x^2}\right|\cdot\left|\int_0^x(\sqrt{t}+\sigma\upsilon\nu 2t)dt\right|\le\left|\frac{1}{x^2}\right|\cdot\int_0^x|\sqrt{t}+\sigma\upsilon\nu 2t|\,dt\le\left|\frac{1}{x^2}\right|\cdot\int_0^x|\sqrt{t}|\,dt=$$

$$=\frac{1}{x^2}\cdot\left[\frac{2\cdot t\sqrt{t}}{3}\right]_0^x=\frac{2\cdot x\cdot\sqrt{x}}{3\cdot x^2}=\frac{2}{3\cdot\sqrt{x}}\text{............}$$

ή

$$|f(x)|=\left|\frac{1}{x^2}\cdot\int_0^x(\sqrt{t}+\sigma\upsilon\nu 2t)dt\right|=\left|\frac{1}{x^2}\cdot\left[\frac{2\cdot t\cdot\sqrt{t}}{3}+\frac{\eta\mu 2t}{2}\right]_0^x\right|=\left|\frac{2\cdot x\cdot\sqrt{x}}{3\cdot x^2}+\frac{\eta\mu 2x}{2x^2}\right|=\left|\frac{2}{3\cdot\sqrt{x}}+\frac{\eta\mu 2x}{2x^2}\right|\le$$

$$\le\left|\frac{2}{3\cdot\sqrt{x}}\right|+\left|\frac{\eta\mu 2x}{2x^2}\right|\le\left|\frac{2}{3\cdot\sqrt{x}}\right|+\left|\frac{1}{2x^2}\right|\xrightarrow{x\to+\infty}0$$

Άσκηση 2

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0,+\infty)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\cdot f(x))=0$, να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{x^2}^{2x^2}f(t)dt=0$$

Υπόδειξη:

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\int_0^x f(t)dt$ και εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής στο $[x^2, 2x^2]$ οπότε

υπάρχει $\xi\in[x^2,2x^2]: f(\xi)=\dfrac{\int_0^{2x^2}f(t)dt-\int_0^{x^2}f(t)dt}{x^2}\Leftrightarrow\int_{x^2}^{2x^2}f(t)dt=x^2\cdot f(\xi)$. Όμως

www.aris-nikolaidis.tk

$$|x^2\cdot f(\xi)|=|\frac{x^2}{\xi}\cdot\xi\cdot f(\xi)|\le|\xi\cdot f(\xi)|$$ ....

Άσκηση 3

Να βρείτε το όριο : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{x^3}\eta\mu\sqrt[3]{t}\cdot dt}{x^4}$.

Υπόδειξη:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{x^3}\eta\mu\sqrt[3]{t}\cdot dt}{x^4}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\int_0^{x^3}\eta\mu\sqrt[3]{t}\cdot dt\right)'}{\left(x^4\right)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{3\cdot x^2\cdot\eta\mu x}{4\cdot x^3}=\lim_{x\to 0^+}\frac{3\cdot\eta\mu x}{4\cdot x}=\frac{3}{4}$$

ή

$$\left|\frac{\int_0^{x^3}\eta\mu\sqrt[3]{t}\cdot dt}{x^4}\right|=\frac{\left|\int_0^{x^3}\eta\mu\sqrt[3]{t}\cdot dt\right|}{x^4}\le\frac{\int_0^{x^3}1\cdot dt}{x^4}=\frac{x^3}{x^4}=\frac{1}{x}\xrightarrow{x\to 0^+}+\infty$$

Άσκηση 4

Αν $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-1}{x-2}=3$, να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^\nu\cdot f(x)-2^\nu}{x-2}$

Υπόδειξη:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^\nu\cdot f(x)-2^\nu}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{x^\nu\cdot f(x)-2^\nu+x^\nu-x^\nu}{x-2}=\lim_{x\to 2}\left[x^\nu\frac{f(x)-1}{x-2}+\frac{(x-2)\cdot(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}\cdot 2+...+2^{\nu-1})}{x-2}\right]=$$

$$=2^\nu\cdot 3+\nu\cdot 2^{\nu-1}$$

Άσκηση 5

Να βρεθούν τα όρια :

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}\cdot\int_x^{3x}\dfrac{\eta\mu t}{t}dt\right]$, $x>0$

www.aris-nikolaidis.tk

2. $$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \eta\mu t \cdot e^{t^2} dt}{x^2} \quad , \quad x > 0$$

Υπόδειξη:

1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \int_0^x \frac{\eta\mu t}{t} dt$, $x > 0$ και από το θεώρημα της μέσης τιμής στο [x,3x] έχουμε ότι υπάρχει $\xi \in (x,3x) : g'(\xi) = \frac{\int_0^{3x} \frac{\eta\mu t}{t} dt - \int_0^{x} \frac{\eta\mu t}{t} dt}{2x} \Leftrightarrow \int_x^{3x} \frac{\eta\mu t}{t} dt = 2x \cdot g'(x)$. Όμως $g'(x) = 3 \cdot \frac{\eta\mu 3x}{3x} - \frac{\eta\mu x}{x}$ και άρα $\int_x^{3x} \frac{\eta\mu t}{t} dt = 2 \cdot (\eta\mu 3x - \eta\mu x) \Rightarrow \frac{1}{x} \cdot \int_x^{3x} \frac{\eta\mu t}{t} dt = 2 \cdot (\frac{\eta\mu 3x}{x} - \frac{\eta\mu x}{x})$

   ……
2. De L′ Hospital ……

Άσκηση 6

Αν η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική και ο βαθμός της καθορίζεται από την ρίψη ενός ζαριού, να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου Α: $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 + x^2 + 1}{f(x)} = 0$

Υπόδειξη:

ν=1,2,3,4,5,6 και ευνοϊκές περιπτώσεις κ=4,5,6 δηλ. Ρ(Α)=3/6=1/2

Άσκηση 7

Να αποδείξετε ότι : $$\lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{3t+4} dt \right)^2}{\left(\int_0^x e^{2t-1} dt \right)^2} = +\infty$$

Υπόδειξη:

$$\int_0^x e^{3t+4} dt = \frac{1}{3} \cdot \left[e^{3t+4} \right]_0^x = \frac{1}{3} \cdot (e^{3x+4} - e^4) = \frac{e^4}{3} \cdot (e^{3x} - 1)$$

$$\int_0^x e^{2t-1} dt = \frac{1}{2} \cdot [\, e^{2t-1} \,]_0^x = \frac{1}{2} \cdot (e^{2x-1} - e^{-1}) = \frac{1}{2e} \cdot (e^{2x} - 1)$$

www.aris-nikolaidis.tk

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^x e^{3t+4}dt\right)^2}{\left(\int_0^x e^{2t-1}dt\right)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4\cdot e^{10}\cdot(e^{3x}-1)^2}{9\cdot(e^{2x}-1)^2}=\text{κανόνας De L' Hospital}=\frac{4\cdot e^{10}}{9}\lim_{x\to+\infty}\frac{2(e^{3x}-1)\cdot 3\cdot e^{3x}}{2(e^{2x}-1)\cdot 2\cdot e^{2x}}$$

$$=\frac{2\cdot e^{10}}{3}\cdot\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^{4x}-e^{x}}{e^{2x}-1}\right]\overset{e^x=y}{=}\frac{2\cdot e^{10}}{3}\cdot\lim_{y\to+\infty}\frac{y^4-y}{y^2-1}=+\infty$$

Άσκηση 8

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$f(x)=e^{3x+2}$ και $g(x)=\ln x^2$ ορισμένες στα σύνολα IR^* και $[1,e^4]$ αντίστοιχα.

1. Να εξετάσετε αν ορίζεται η συνάρτηση $h=g\circ f$

2. Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-\eta\mu^2 x-4}{x}$

Άσκηση 9

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}+1$, με $x>0$

1. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία

2. Να υπολογιστεί το $\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}f(t)dt$

Υπόδειξη:

1. $f'(x)=-\frac{\frac{4\cdot x^3}{2\cdot\sqrt{1+x^4}}}{(1+x^4)}<0$ για κάθε $x>0$ και άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$

2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\int_0^x f(t)dt$ και εφαρμόζουμε γι' αυτήν το θεώρημα μέσης τιμής ,

οπότε υπάρχει $\xi\in(x,x+1):g'(\xi)=\frac{\int_0^{x+1}f(t)dt-\int_0^x f(t)dt}{1}\Leftrightarrow f(\xi)=\int_x^{x+1}f(t)dt$ και άρα

www.aris-nikolaidis.tk

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{x}^{x+1} f(t)dt = \lim_{\xi\to+\infty} f(\xi) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\xi^4}}+1\right) = 1$$

Άσκηση 10

Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x - 1^+} \frac{1}{x^4 - x}\cdot\int_{x}^{x^4}\frac{1}{e^t}dt$

Υπόδειξη:

Εφαρμόζουμε για την συνάρτηση $g(x) = \int_0^x \frac{1}{e^t}dt = \left[-\frac{1}{e^t}\right]_0^x = -\frac{1}{e^x}+1$ το θεώρημα μέσης τιμής στο

διάστημα $[x , x^4]$ $(x>1)$ οπότε υπάρχει $\xi \in (x , x^4) : \frac{1}{e^{\xi}} = \frac{\int_1^{x^4}\frac{1}{e^t}dt - \int_1^{x^4}\frac{1}{e^t}dt}{x^4 - x^3} = \frac{\int_x^{x^4}\frac{1}{e^t}dt}{x^4 - x^3}$

Όταν $x \to +\infty \Rightarrow \xi \to +\infty$ και άρα $\lim\limits_{\xi\to+\infty}\frac{1}{e^{\xi}} = 0$

www.aris-nikolaidis.tk