Σ Υ Ν Α Ρ Τ Η Σ Ε Ι Σ

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

$f(x)=\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^3+3x^2-4x}}$	$g(x)=\sqrt{\dfrac{x-1}{x-2}}$	$h(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-2}}$	$t(x)=\sqrt{\lvert 1-2x\rvert-5}$	$\varphi(x)=\sqrt{\ln^2 x-1}$
$\sigma(x)=\ln(\ln x)$	$p(x)=\sqrt{x\cdot \ln x}$	$m(x)=\sqrt{x^2-3\lambda x-3\lambda-1}$ $\lambda\in R$	$k(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\ln\sqrt{x^2-4}}$	$s(x)=\sqrt{\eta\mu\sqrt{x}}$

2. Να εξετάσετε αν για τις παραπάνω συναρτήσεις ισχύει: g(x)=h(x)

3. Για ποιες τιμές του $\mu\in R$ η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{\ln(x^2+2\mu x+4)}$ έχει πεδίο ορισμού το R ;

4. Δίνεται η συνάρτηση $f:[2,7]\to R$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)=f(x^2-2)$

   Υπόδειξη: Αν $h(x)=x^2-2$ $|A_h=R$, τότε: g(x)=f(h(x))=(foh)(x), δηλαδή αναζητούμε το πεδίο ορισμού της σύνθεσης foh ………….

5. Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in R$ για τις οποίες οι συναρτήσεις

   $f(x)=\dfrac{2\alpha x}{x-4-\alpha}$ και $g(x)=\dfrac{x^{\alpha}+x}{x-3\alpha}$ είναι ίσες.

6. Βρείτε για ποιες τιμές του $x\in R$, η γραφική παράσταση της

   $f(x)=e^{x^2}$ δεν είναι «κάτω» από τη γραφική παράσταση της

   $g(x)=e^{\lambda x-\lambda}$, $\lambda\in(0,4)$

7. Βρείτε τα κοινά σημεία των συναρτήσεων: $f(x)=\alpha x^2$ και

$$g(x)=(1-2\alpha)x+\frac{4\alpha-1}{4\alpha} \quad , \quad \alpha\in R^*$$

8. Δίνεται η συνάρτηση f|R, όπου για κάθε x∈ R ισχύει:

$$x^\nu f(x)+f(-x)=x^\nu \quad , \quad x\in R \text{ , ν περιττός φυσικός αριθμός με } \nu\geq 3$$

Να βρείτε τον τύπο της f.

Υπόδειξη: Θέτουμε στην θέση του x το –x και η σχέση που προκύπτει με την αρχική δίνουν ένα σύστημα, η λύση του οποίου ……

9. Δίνεται η άρτια συνάρτηση f|R, όπου για κάθε x,y∈ R ικανοποιεί την σχέση: $f(x+y)\leq f(x)+f(y)$.

   - ✓ Δείξτε ότι η f έχει μη αρνητικές τιμές
   - ✓ Δείξτε ότι: $|f(x)-f(y)|\leq f(x-y) \quad , \quad \text{για κάθε } x,y\in R$

Υπόδειξη: Για x=y=0 προκύπτει f(0) $\geq$ 0

Για y=-x προκύπτει f(0) $\leq$ f(x)+f(-x)=2f(x) γιατί η f είναι άρτια. Άρα …..

Στη δεδομένη σχέση θέτουμε όπου x το x-y: f(x) $\leq$ f(x-y)+f(y) δηλ.

f(x) - f(y) $\leq$ f(x-y)

και θέτοντας όπου y το y-x ……..

10. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{x}{x^2+\alpha^2}$ και $g(x)=\beta x$ με α≠0 και β≠0. Να βρείτε τα α, β ώστε να ισχύει: fog=gof.

Απάντηση: β=-1 , α∈ R^*

11. Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση τν παρακάτω συναρτήσεων (αν υπάρχει):

$f(x)=-1+2\sqrt{3-x}$	$f(x)=\frac{x-1}{2-x}$	$f(x)=\frac{e^x+1}{e^x-1}$	$f(x)=\ln(1-x)$
$f(x)=\begin{cases} x+2 \ , & \text{αν } x\leq 2 \\ 3x-2 \ , & \text{αν } x>2 \end{cases}$	$f(x)=\ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$	$f(x)=x^2+x+1 \ \vert \ A=[0,2)$	$f(x)=\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$

12. Να βρείτε τη σύνθεση gof για τις παρακάτω συναρτήσεις:

I. $f(x)=\ln x$, $g(x)=e^x$

II. $f(x)=\sqrt{x-1}$, $g(x)=\ln(-x)$

III. $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x}$, $g(x)=\dfrac{1}{x}$

13. Δίνεται η συνάρτηση f|R, όπου για κάθε $x,y\in R$ ικανοποιεί την σχέση: $f(x+y)=f(x)+f(y)$. Να δείξετε ότι:

I. Η f είναι περιττή

II. $f(kx)=kf(x)$ για κάθε $k\in R$ και μετά για κάθε $k\in Z$

III. Αν η f έχει μοναδική ρίζα να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και ισχύει: $f^{-1}(x+y)=f^{-1}(x)+f^{-1}(y)$

<u>Υπόδειξη</u>:

I. Για x=0 προκύπτει f(0)=0 και αν θέσουμε y=-x τότε … f(-x)= - f(x)

II. Αν $k\in N^*$ εργαζόμαστε με επαγωγή. Αν $k\in Z_-$ τότε –k >0 και άρα: f(-kx) = - kf(x) δηλ. –f(kx)= -kf(x) δηλ. f(kx)= kf(x)

III. Αφού έχει μοναδική ρίζα αυτή είναι το 0 δηλ. f(x)=0 και άρα x=0. Θα δείξουμε ότι η f είναι «1-1»: Έστω $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow f(x_1)-f(x_2)=0 \Rightarrow f(x_1)+f(-x_2)=0 \Rightarrow f(x_1-x_2)=0 \Rightarrow x_1-x_2=0 \Rightarrow x_1=x_2$.

Θέλω να δείξω ότι: $f^{-1}(x+y)=f^{-1}(x)+f^{-1}(y) \Leftrightarrow$

$f(f^{-1}(x+y))=f(f^{-1}(x)+f^{-1}(y)) \Leftrightarrow$

$x+y=f(f^{-1}(x))+f(f^{-1}(y)) \Leftrightarrow$ x+y = x+y που ισχύει.

14. Αν για τη συνάρτηση f|R ισχύει: $(f\circ f)(x)=x^{2001}-f(x)$, να λύσετε την εξίσωση : $f(x^{2001}+2001x)=f(x+2001)$

<u>Υπόδειξη</u>: Θα δείξουμε πρώτα ότι η f είναι «1-1»:

Αν $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1))=f(f(x_2)) \Rightarrow$ …….. $\Rightarrow x_1=x_2$

Άρα η εξίσωση γίνεται …….. $\Rightarrow$ x=1

15. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^3+x+2$

I. Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα

II. Υπολογίστε την τιμή $f^{-1}(2)$

III. Να λύσετε την ανίσωση: $f^{-1}(x^2-x)>0$

<u>Υπόδειξη</u>:

I.

$$\left.\begin{array}{l} x_1<x_2 \Rightarrow x_1^3<x_2^3 \\ x_1<x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow x_1^3+x_1<x_2^3+x_2 \Rightarrow x_1^3+x_1+2<x_2^3+x_2+2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_1)<f(x_2) \quad \text{δηλ. γνησίως αύξουσα στο R}$$

II. Η f σαν γνησίως αύξουσα στο R αντιστρέφεται και ισχύει: $f^{-1}(f(x))=x \Leftrightarrow f^{-1}(x^3+x+2)=x$ και για x=0 έχουμε: $f^{-1}(2)=0$

III. $f^{-1}(x^2-x)>0 \Leftrightarrow f^{-1}(x^2-x)>f^{-1}(2) \Leftrightarrow x^2-x>2 \Leftrightarrow ......$

16. Αν για τη συνάρτηση f|R ισχύει: f(x+y)=f(x)+f(y) για κάθε x , y $\in$ R, να αποδειχθεί ότι:

I. f(0)=0

II. Η f είναι περιττή

III. f(νx)=ν·f(x) , ν$\in N^*$

IV. f(κx)=κ·f(x) , κ$\in$ Z

17. Αν για τη συνάρτηση f|R με f(0)$\neq$0 ισχύει: f(x+y)+f(x-y)=2f(x)·f(y) για κάθε x , y $\in$ R, να αποδειχθεί ότι:

I. Η f είναι άρτια

II. Βρείτε τη σταθερή συνάρτηση f που ικανοποιεί την παραπάνω σχέση.

<u>Υπόδειξη</u>: Για x=y=0 προκύπτει f(0)=1

Για χ=0 προκύπτει f(y)=f(-y)

18. Βρείτε όλες τις συναρτήσεις f που ικανοποιούν τη σχέση:

$$f(x+y)=f^2(x)+f^2(y) \quad , \quad \text{για κάθε } x,y\in R$$

19. Μια συνάρτηση $f\,|\,(0,+\infty)$, έχει την ιδιότητα:

$$f(xy)=f(x)+f(y)\quad ,\quad \text{για κάθε}\ \ x,y\in(0,+\infty)$$

I. Να υπολογίσετε την τιμή f(1)

II. Να δείξετε ότι: $f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)\quad ,\quad x,y\in(0,+\infty)$

III. Να δείξετε:

$$f(x^{\rho})=\rho f(x)\quad ,\quad \rho\in Z\ ,\ x\in(0,+\infty)$$

20. Δίνεται η αντιστρέψιμη συνάρτηση f|A ώστε να ισχύει:

$f(x_1x_2)=f(x_1)+f(x_2)\quad ,\quad \text{για κάθε}\ \ x_1,x_2\in R$. Να αποδείξετε ότι:

$$f^{-1}(y_1+y_2)=f^{-1}(y_1)\cdot f^{-1}(y_2)$$

<u>Υπόδειξη</u>: Έστω

$f(x_1)=y_1\ ,\ f(x_2)=y_2$ οπότε $f^{-1}(y_1)=x_1$ και $f^{-1}(y_2)=x_2$

Θέλω να δείξω ότι:

$$f^{-1}(y_1+y_2)=f^{-1}(y_1)\cdot f^{-1}(y_2)\Leftrightarrow f^{-1}(y_1+y_2)=x_1\cdot x_2\Leftrightarrow f(f^{-1}(y_1+y_2))=f(x_1\cdot x_2)$$
$$\Leftrightarrow y_1+y_2=f(x_1\cdot x_2)\Leftrightarrow f(x_1)+f(x_2)=f(x_1\cdot x_2)\quad \text{που ισχύει.}$$

21. Δίνεται η συνάρτηση f|R με f(x) > 0 για κάθε $x\in R$ και

$f(\alpha+\beta)=f(\alpha)\cdot f(\beta)\quad ,\quad \text{για κάθε}\ \ \alpha,\beta\in R$. Να αποδειχθεί ότι:

I. f(0)=1

II. $f(\nu\cdot x)=[f(x)]^{\nu}$, $\nu\in N^*$

III. Αν η f είναι αντιστρέψιμη να δείξετε ότι:

$$f^{-1}(\alpha\cdot\beta)=f^{-1}(\alpha)+f^{-1}(\beta)\quad ,\quad \text{για κάθε}\ \ \alpha,\beta\in(0,+\infty)$$

22. Να αποδείξετε ότι:

I. f = άρτια και g = άρτια $\Rightarrow$ f·g = άρτια

II. f = περιττή και g = περιττή $\Rightarrow$ f·g = άρτια

III. f = άρτια και g =περιττή $\Rightarrow$ f·g = περιττή

IV. f = περιττή και g = άρτια $\Rightarrow$ f·g = περιττή

23. Να αποδείξετε ότι:

I. f = άρτια και g = άρτια $\Rightarrow$ fog = άρτια

II. f = περιττή και g = περιττή $\Rightarrow$ fog = περιττή

III. f = άρτια και g =περιττή $\Rightarrow$ fog = άρτια

24. Δίνονται οι συναρτήσεις : $g : R - \ R \ \ \mu\varepsilon \ \ g(x) = 3x - 1$ και

$f \circ g : R \to R \ \ \mu\varepsilon \ \ (f \circ g)(x) = x^2 + x - 5$. Να βρείτε τον τύπο της

$f : R - \ R$

25. Αν για κάθε x∈ R ισχύει $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$, να αποδείξετε

ότι: $f^{-1} = g$

26. Αν $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} \ \ \kappa\alpha\iota \ \ g(x) = \ln\dfrac{1 + x}{1 - x}$, να ορίσετε την $g \circ f$ και να

δείξετε ότι είναι η ταυτοτική συνάρτηση στο R.

27. Αν $f(x) = x^2 + 2x + 2 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ g(x) = -x^2 + 2x$, να αποδείξετε ότι η

εξίσωση $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ δεν έχει λύση στο R.

28. Αν για την συνάρτηση f|R ισχύει: $f(0) \neq 0$ και

$f(x - y) + f(x - y) = 2f(x) \cdot f(y) \ \ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \ \ x, y \in R$

I. Να δείξετε ότι η f είναι άρτια
II. Ποια σταθερή συνάρτηση ικανοποιεί την παραπάνω σχέση;