ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΥ ΟΡΙΖΟΝΤΑΙ ΜΕ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

ΣΧΟΛΙΑ :

Είναι γνωστό ότι για μια συνεχή συνάρτηση f(t) σε ένα διάστημα Δ , το ολοκλήρωμα $F(x_0)=\int_a^{x_0} f(t)dt$ ορίζει έναν πραγματικό αριθμό όπου x_o είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του Δ και α ένα αυθαίρετο αλλά σταθερό όμως σημείο του Δ.

Αν τώρα σε κάθε σημείο x_o του Δ αντιστοιχίσουμε τον μοναδικό πραγματικό αριθμό $F(x_0)=\int_a^{x_0} f(t)dt$, τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Δ, τιμές στο R και τύπο $F(x)=\int_a^{x} f(t)dt$.

Στον τύπο αυτής της συνάρτησης , με το χ συμβολίζουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή της , ενώ με το t την μεταβλητή ολοκλήρωσης.

ΘΕΩΡΗΜΑ : Έστω μια συνεχή συνάρτηση f(t) σε ένα διάστημα Δ , με x_o ένα οποιοδήποτε σημείο του Δ και α ένα αυθαίρετο αλλά σταθερό όμως σημείο του Δ . Τότε η συνάρτηση όπως ορίσθηκε παραπάνω

$F(x)=\int_{a}^{x} f(t)dt$, είναι παραγωγίσιμη στο Δ και για κάθε χ του Δ ισχύει:

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\left(\int_{a}^{x} f(t)dt\right)=f(t) \quad (1)$$

Μέσα από το θεώρημα αυτό φαίνεται η σχέση μεταξύ της παραγώγισης και της ολοκλήρωσης .

Επίσης βλέπουμε ότι κάθε συνεχής συνάρτηση f είναι παράγωγος μιας άλλης συνάρτησης F που είναι και αυτή συνεχής. Η συνεχής αυτή συνάρτηση f ορίζει με μοναδικό τρόπο την παραγωγίσιμη συνάρτηση F χωρίς να ισχύει το αντίστροφο (διότι για κάθε σταθερά c του R ισχύει (F(x)+c)΄ =f(x)) .

Τέλος, ας παρατηρήσουμε ότι : $\int_{a}^{x} f(t)dt \neq \int_{\beta}^{x} f(t)dt$ (αφού εκφράζουν διαφορετικά εμβαδά στο καρτεσιανό επίπεδο). Όμως ισχύει :

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{a}^{x} f(t)dt\right)=\frac{d}{dx}\left(\int_{\beta}^{x} f(t)dt\right)=f(t)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ : Μπορούμε να γενικεύσουμε το προηγούμενο θεώρημα όπως παρακάτω :

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση και g παραγωγίσιμη στο Δ τότε η

$F(x)=\int_{a}^{g(x)} f(t)dt$, $\alpha\in\Delta$, $g(\chi)\in\Delta$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ με

F΄(x)=f(g(x))·g΄(x) .

Απόδειξη : Αν $H(x)=\int_a^x f(t)dt \Rightarrow H'(x)=f(x)$ και H(g(x))=F(x) $\Rightarrow$

(H(g(x)))΄=F΄(x) $\Rightarrow$ f(g(x))g΄(x)=F΄(x) .

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1 :

I. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και $F(x)=\int_0^x xf(t)dt$, x$\in$R τότε να βρεθεί η τιμή της F΄΄ στη θέση x=1 στην περίπτωση που είναι f(1)=995 και f΄(1)=5 .

II. Αν είναι f(x) > 0 και $(f^2(x))'$ > 0 για κάθε x > 0 τότε : Να αποδειχθεί ότι F΄(1995) > F΄(1994)

Να βρεθούν οι τιμές του K, K > 6 / 5 για τις οποίες αληθεύει η ισότητα

: $\int_0^{K^2} f(t)dt + K^2 f(K^2) = \int_0^{5K-6} f(t)dt + (5K-6)\cdot f(5K-6)$

ΑΣΚΗΣΗ 2 :

Ορίζουμε τη συνάρτηση f(x)=ln[$(e^x-1)/x$] , x > 0

- Να αποδειχθεί ότι :f(x) > 0
- Να υπολογισθεί το $\lim_{x\to+\infty} \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt$

- Να παραγωγιθεί η συνάρτηση $F(x) = \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt$

ΑΣΚΗΣΗ 3 :

Δίνεται η συνάρτηση : $F(x) = \int_{-2}^{x} \sqrt{4-t^2}dt$. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της .

ΑΣΚΗΣΗ 4 :

1. Να βρεθεί ο τύπος μιας συνεχούς συνάρτησης f που ικανοποιεί την ισότητα : F(x)=x με $F(x) = \int_{0}^{x} (8t-4) f(4t^2 - 4t)dt$ για κάθε x < 0
2. Αν για την ταχύτητα U(t) ενός κινητού που κινείται πάνω σε ένα άξονα συντεταγμένων είναι U(t)=f(t) σε m/sec , να βρεθεί το διάστημα που διανύει το κινητό από τη χρονική στιγμή t=3sec μέχρι τη στιγμή t=15sec .

ΑΣΚΗΣΗ 5 :

Ένα σωματίδιο κινείται πάνω σε έναν άξονα συντεταγμένων με επιτάχυνση $\gamma(t)=4 / (4-t)^2$ cm/sec^2.

Να υπολογισθεί το διάστημα που διανύει το σωματίδιο μεταξύ των χρονικών στιγμών t=1sec , t=2sec αν είναι γνωστό ότι η ταχύτητα του σωματιδίου τη χρονική στιγμή t=0sec είναι 2cm / sec .

ΑΡΤΙΕΣ ……ΠΕΡΙΤΤΕΣ ……ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

ΒΑΣΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Π1 : Αν η συνάρτηση f | [-α , α] είναι συνεχής και περιττή τότε :

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0 \ , \ \alpha \in R$$

ΑΠΟΔ. Έχουμε $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$ (1) και αν θέσουμε x=-t στο ολοκλήρωμα $\int_{-a}^{0} f(x)dx$ έχουμε

$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(-t)d(-t) = \int_{a}^{0} f(t)dt = \int_{a}^{0} f(x)dx$ και η (1) γίνεται :

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{a}^{a} f(x)dx = 0 \ .$$

Π2 : Αν η συνάρτηση f | R είναι περιττή και συνεχής , τότε η συνάρτηση

$F(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt$ είναι άρτια .

ΑΠΟΔ. Το πεδίο ορισμού της F είναι το R και άρα

$$F(-x) = \int_{a}^{-x} f(t)dt \overset{t=-y}{=} \int_{-a}^{x} f(-y)d(-y) = \int_{-a}^{x} f(y)dy =$$

$= \int_{-a}^{a} f(y)dy + \int_{a}^{x} f(y)dy = \int_{a}^{x} f(y)dy$ δηλ. άρτια .

Π3 : Αν η συνάρτηση f | [-α , α] είναι άρτια και συνεχής , τότε :

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\cdot\int_{0}^{a} f(x)dx \ , \alpha \in R$$

ΑΠΟΔ. Έχουμε : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$.Όμως ισχύει ότι :

$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx$ και άρα $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\cdot\int_{0}^{a} f(x)dx \ , \alpha \in R\cdot$

Π4 : Αν η συνάρτηση f | [-α , α] είναι συνεχής τότε :

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a}[f(x) + f(-x)]dx\cdot$$

ΑΠΟΔ. Είναι $\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$ (1) και εργαζόμενοι

όπως προηγουμένως έχουμε $\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(-x)dx$ οπότε η (1) γίνεται

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(-x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a}[f(x) + f(-x)]dx$$

Π5 : Αν η συνάρτηση f | R είναι συνεχής , τότε η f | R είναι περιττή αν και

μόνο αν ισχύει $\int_{-x}^{x} f(t)dt = c$ για κάθε x $\in$ R (C=σταθερά).

ΑΠΟΔ. Έστω ότι $\int_{-x}^{x} f(t)dt = c\cdot$

Είναι $\int_{-x}^{x} f(t)dt = c \Leftrightarrow \int_{-x}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt = c \Leftrightarrow \int_{0}^{x} f(t)dt - \int_{0}^{-x} f(t)dt = c$ και

αν

F(x)=$\int_{0}^{x} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f | R έχουμε : F(x)-F(-x)=c $\Rightarrow$

F΄(x)-F΄(-x)=0 (1) και επειδή F΄(x)=f(x) η (1) γίνεται f(x)+f(-x)=0 $\Rightarrow$

f(-x)=-f(x) για κάθε x του R δηλ. περιττή στο R .

Έστω ότι f(-x) = -f(x) για κάθε x του R .Θα δείξουμε ότι $\int_{-x}^{x} f(t)dt = c$

Αν $H(x) = \int_{-x}^{x} f(t)dt$ και $F(x) = \int_{0}^{x} f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f | R

έχουμε H(x)=F(x)-F(-x) δηλ. H΄(x)=F΄(x)+F΄(-x)=f(x)+f(-x)=0 . Αφού

H΄(x)=0 για κάθε x του R , η H(x) = c για κάθε x του R και έτσι

$\int_{-x}^{x} f(t)dt = c$

Σημείωση : Στην πρόταση αυτή θέτοντας χ=0 προκύπτει C=0 και έτσι

$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ δηλαδή αποδεικνύεται η Π1 με άλλο τρόπο .

Π6 : Αν η συνάρτηση f | [α , b] είναι περιοδική με περίοδο T , και

συνεχής τότε : $\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a+KT}^{b+KT} f(x)dx$, K$\in$ Z .

ΑΠΟΔ. Προφανώς ισχύει ότι f(x+KT)=f(x) για κάθε α $\leq$ χ $\leq$ b και ακόμη f(x-KT)=f(x) για κάθε α $\leq$ χ $\leq$ b . Θέτοντας t=x+KT έχουμε :

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a+KT}^{b+KT} f(t-KT)dt = \int_{a+KT}^{b+KT} f(t)dt = \int_{a+KT}^{b+KT} f(x)dx$$

Π7 : Αν η συνάρτηση f | R είναι συνεχής και περιοδική με περίοδο Τ τότε

για κάθε ισχύει $\int_{a}^{x+T} f(t)dt = \int_{0}^{T} f(t)dt$.

ΑΠΟΔ. Έχουμε:

$$\int_{a}^{x+T} f(t)dt = \int_{a}^{T} f(t)dt + \int_{T}^{x+T} f(t)dt \overset{y+T}{=}$$

$$= \int_{x}^{T} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(y+T)dy = \int_{x}^{T} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(y)dy$$

και άρα : $\int_{a}^{x+T} f(t)dt = \int_{x}^{T} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt = \int_{0}^{T} f(t)dt$.

Π8 : Αν η συνάρτηση f | [-T/2 , T/2] είναι περιττή και περιοδική στο R ,

τότε η συνάρτηση $F(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt$ είναι περιοδική με περίοδο Τ .

ΑΠΟΔ. Αρκεί να δείξουμε ότιF(x)=Fx+T)

$$\Leftrightarrow \int_{a}^{x} f(t)dt = \int_{a}^{x+T} f(t)dt \Leftrightarrow \int_{a}^{x} f(t)dt - \int_{a}^{x+T} f(t)dt = 0 \Leftrightarrow \int_{x}^{x+T} f(t)dt = 0$$

Σύμφωνα όμως με την Π7 για κάθε x του R ισχύει :

$\int_{a}^{x+T} f(t)dt = \int_{0}^{T} f(t)dt$ άρα θα ισχύει και για x=- T/2 . Άρα

$\int_{0}^{T} f(t)dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt = 0$ (αφού η f είναι περιττή) και τελικά……

Π9 : Αν η συνάρτηση f | R είναι συνεχής τότε είναι περιοδική με περίοδο T

αν και μόνο αν $\int_{x}^{x+T} f(t)dt = c$, για κάθε x $\in$ R .

ΑΠΟΔ. Αφού η f | R είναι περιοδική με περίοδο T , για κάθε x του R θα

έχουμε f(x+T)=f(x) . Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x) = \int_{0}^{x+T} f(t)dt - \int_{0}^{x} f(t)dt$

, x$\in$R που είναι παραγωγίσιμη γιατί η f | R είναι συνεχής .Θέτουμε

$R(x) = \int_{0}^{x} f(t)dt \Rightarrow R(x+T) = \int_{0}^{x+T} f(t)dt$ οπότε F(x+T)=R(x+T)-R(x) δηλ.

F΄(x+T)=R΄(x+T)-R΄(x) άρα F΄(x)=f(x+T)-f(x)= f(x)-f(x)=0 για κάθε x του

R και άρα F(x) = c και έτσι $\int_{0}^{x+T} f(t)dt - \int_{0}^{x} f(t)dt = 0 \Rightarrow \int_{x}^{x+T} f(t)dt = c$

για κάθε χ $\in$ R.

Αντίστροφα , αν $\int_{x}^{x+T} f(t)dt = c$ για κάθε χ $\in$ R τότε f(x+T) -f(x)=0

δηλ. f(x+T) =f(x) για κάθε χ του R δηλαδή περιοδική με περίοδο T .

aris nikolaidis

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Θεωρούμε τη μη μηδενική συνάρτηση f |R με τις ιδιότητες :

   f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y) για κάθε x , y του R και f | R συνεχής . Να

   αποδειχθεί ότι f(0)=1 και $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\cdot\int_{0}^{a} f(x)dx$, $\alpha \in \mathrm{R}$.

ΛΥΣΗ : Επειδή η συνάρτηση είναι μη μηδενική , θα υπάρχει ένας

τουλάχιστον πραγματικός αριθμός z ώστε f(z) διαφορετικό του 0. Για x=z ,

y=0 η υπόθεση γίνεται f(z)+f(z)=2f(z)f(0) δηλ. f(0)=1

Για x=0 από την υπόθεση παίρνουμε f(y)+f(-y)=2f(0)f(y) δηλ.

f(y)+f(-y)=2f(y) , άρα f(-y)=f(y) για κάθε y του R, άρα η f | R είναι

άρτια .Επειδή είναι και συνεχής στο R θα είναι και ολοκληρώσιμη

Επομένως θα είναι ολοκληρώσιμη και άρτια στο [-α , α] και τελικά ,

σύμφωνα με την Π3 έχουμε : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\cdot\int_{0}^{a} f(x)dx$, $\alpha \in \mathrm{R}$.

2. Η συνάρτηση R είναι συνεχής στο [-1 , 1] με R(χ)>0 και

   R(χ) R(-χ)=1 για κάθε χ του διαστήματος [-1 , 1] . Να αποδειχθεί ότι:

$\int_{-1}^{1} \frac{x^{4\nu}}{R(x)+1}dx = \frac{1}{4\nu+1}$, ν θετικός ακέραιος .

ΛΥΣΗ :

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{x^{4\nu}}{R(x)+1}dx \overset{x=-u}{=} \int_{1}^{-1} \frac{(-u)^{4\nu}}{R(-u)+1}du = \int_{1}^{-1} \frac{u^{4\nu}}{R(-u)+1}du = \int_{-1}^{1} \frac{x^{4\nu}}{R(-x)+1}dx$$

και επειδή R(χ) R(-χ)=1 έχουμε :

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{x^{4\nu}}{\frac{1}{R(x)}+1}dx=\int_{-1}^{1}\frac{x^{4\nu}R(x)}{R(x)+1}dx=\int_{-1}^{1}\frac{x^{4\nu}[R(x)+1-1]}{R(x)+1}dx\Rightarrow$$

$$I=\int_{-1}^{1}x^{4\nu}dx-\int_{-1}^{1}\frac{x^{4\nu}}{R(x)+1}dx\Rightarrow 2I=\int_{-1}^{1}x^{4\nu}dx=2\int_{0}^{1}x^{4\nu}dx$$

$$\Rightarrow I=\int_{0}^{1}x^{4\nu}dx=\frac{1}{4\nu+1}$$

aris nikolaidis