Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

ΣΥΝΕΧΕΙΑ – BOLZANO – ΕΝΔΙΑΜΕΣΕΣ ΤΙΜΕΣ

Άσκηση 1

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:[0,2] \to IR$ ώστε $f(0)=f(2)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x, y \in [0,2]$ ώστε $|x-y|=1$ και $f(x)=f(y)$

Υπόδειξη :

Αρκεί να δειχθεί ότι υπάρχουν $x, y \in [0,2]$ με $x=y+1$ και $f(y+1)=f(y)$ και ότι υπάρχουν $x, y \in [0,2]$ με $x=y-1$ και $f(y-1)=f(y)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(y)=f(y+1)-f(y)$ που είναι συνεχής στο $[0,1]$ και

$$\left\{\begin{matrix} h(0)=f(1)-f(0) \\ \\ h(1)=f(2)-f(1) \end{matrix}\right\} \overset{f(0)=f(2)}{\Rightarrow} h(0)\cdot h(1)=-[f(1)-f(0)]^2 \le 0$$. Άρα υπάρχει

$\xi \in [0,1]$ ώστε $h(\xi)=0 \Leftrightarrow f(\xi+1)=f(\xi)$ με $\xi+1, \xi \in [0,2]$ και $(\xi+1)-\xi=1$. Για ξ+1=x και ξ=y προκύπτει f(x)=f(y) με $x, y \in [0,2]$ και $x-y=1$

Όμοια και για την άλλη περίπτωση.

Άσκηση 2

Αν μια συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \to [\alpha,\beta]$ με $f(\alpha) \ge \alpha$, $f(\beta) \le \beta$ είναι συνεχής τότε υπάρχει $\gamma \in [\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(\gamma)=\gamma$

Υπόδειξη :

Αν f(α)=α ή f(β)=β τότε η πρόταση ισχύει για γ=α ή γ=β αντίστοιχα. Θεωρούμε τη συνάρτηση h(x)=f(x)-x που είναι συνεχής στο [α , β]

Έστω $\left\{\begin{matrix} f(\alpha) \ne \alpha \\ \\ f(\beta) \ne \beta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} f(\alpha) > \alpha \\ \\ f(\beta) < \beta \end{matrix}\right\} \Rightarrow (f(\alpha)-\alpha)\cdot(f(\beta)-\beta) < 0 \Rightarrow h(x) < 0$ άρα από το θεώρημα Bolzano …

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$, με $x\in[e,e^2]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός

$x_0\in[e,e^2]$ ώστε $f(x_0)=\frac{3}{2}$

Υπόδειξη :

Είναι $f'(x)>0$ για κάθε $x\in[e,e^2]$ δηλ. η f γνησίως αύξουσα οπότε $f([e,e^2])=[1+\frac{1}{e}\ ,\ 2+\frac{1}{e^2}]$

και το 3/2 ανήκει στο διάστημα αυτό.

Άσκηση 4

Έστω $f:[\alpha,\beta]-\ IR$ μια συνεχής συνάρτηση παραγωγίσιμη στο (α , β) με f(α)=0 , f(β)= - 1 και

$\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f'(\xi)=0$

Υπόδειξη :

Αφού f(β)= -1<0 υπάρχει διάστημα της μορφής [β – δ , β] με β>0 ώστε f(x)<0 για κάθε $x\in[\beta-\ \delta,\beta]$.

Έτσι $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0\Rightarrow\int_\alpha^{\beta-\delta} f(x)dx+\int_{\beta-\delta}^\beta f(x)dx=0\Rightarrow\int_\alpha^{\beta-\delta} f(x)dx>0$. Άρα υπάρχει διάστημα [α , β-δ] ώστε

$f(x_1)>0$ για κάθε $x_1\in[\alpha,\beta-\ \delta]$

Στο $[x_1$, β] εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano και στη συνέχεια στο [α , x_0] το θεώρημα Rolle.

Άσκηση 5

Θεωρούμε τις συνεχείς συναρτήσεις $f,g:[0,1]-\ IR$ με $f(x)<0$ και $g(x)>0$ για κάθε $x\in[0,1]$.

Να αποδειχθεί ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in[0,1]$ ώστε $\int_0^\xi f(t)dt=\int_1^\xi g(t)dt$

Υπόδειξη :

Εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano για την συνάρτηση $h(x)=\int_0^x f(t)dt-\int_1^x g(t)dt$ στο [0 , 1]

Άσκηση 6

Θεωρούμε τις συνεχείς συναρτήσεις $f,g:[\alpha,\beta]-\ [\alpha,\beta]$ με σύνολο τιμών το $[\alpha,\beta]$. Να αποδειχθεί ότι υπάρχει $x_0 \in [\alpha, \beta]$ ώστε $(f \circ g)(x_0) + (g \circ f)(x_0) = 2 \cdot x_0$

Άσκηση 7

Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = \int_1^2 \frac{\eta\mu xt}{t} dt$ είναι συνεχής στο IR.

Υπόδειξη :

Είναι $|f(x) - f(x_0)| = |\int_1^2 \frac{\eta\mu xt - \eta\mu x_0 t}{t} dt| \le \int_1^2 \frac{2 \cdot |\eta\mu t \cdot \frac{x - x_0}{2}| \cdot |\sigma\upsilon\nu t \cdot \frac{x + x_0}{2}|}{t} dt$ …….

Άσκηση 8

Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση $f : IR \to IR$ ώστε $(e^x - 1) \cdot f(x) - x = \eta\mu x$ για κάθε $x \in IR$. Να βρείτε τον τύπο της f.

Υπόδειξη :

Είναι $f(x) = \frac{\eta\mu x + x}{e^x - 1}$ για κάθε $x \neq 0$. Ακόμη $f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = 2$

Άσκηση 9

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει f(100)= - 100 , f(101) = 100 να δείξετε ότι υπάρχουν

$\xi_1, \xi_2 \in (100, 101)$ ώστε $\frac{1}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = 0{,}01$

Υπόδειξη :

Στο διάστημα [100 , 101] ισχύει το θεώρημα Bolzano και άρα υπάρχει $x \in (100, 101)$ ώστε $f(x) = 0$.

Εφαρμόζουμε τώρα το θεώρημα μέσης τιμής στα διαστήματα [100 , x] και [x , 101]

Άσκηση 10

Θεωρούμε την συνεχή συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to IR$ με $f(\alpha) \neq f(\beta)$. Αν $\kappa, \lambda \in IR_+^*$ να δείξετε ότι

υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\xi) = \frac{\kappa \cdot f(\alpha) + \lambda \cdot f(\beta)}{\kappa + \lambda}$

Υπόδειξη :

Εφαρμόστε το θεώρημα Bolzano .