Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκληρωτικού Λογισμού

(Εφαρμογές)

1. Ο πληθυσμός Π των κατοίκων μιας πόλης αυξάνεται ως προς το χρόνο με ρυθμό $\frac{\Pi_0}{10}\cdot\ln\frac{5}{4}\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{t}{10}}$, όπου Π_0 ο πληθυσμός κατά τη χρονική στιγμή t.

   Α) Να βρείτε τον πληθυσμό Π(t) μια οποιαδήποτε χρονική στιγμή t.

   Β) Να υπολογίσετε σε πόσα χρόνια ο πληθυσμός των κατοίκων της πόλης θα γίνει $e\cdot\Pi_0$.

   Υπόδειξη:

   Α) $\Pi(t)=\Pi(t_0)+\int_{t_0}^{t}\Pi'(u)du \Leftrightarrow$

   $\Pi(t)=\Pi_0+\int_{t_0}^{t}\frac{\Pi_0}{10}\ln\frac{5}{4}\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{u}{10}}du=\Pi_0+\Pi_0\int_{t_0}^{t}\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{u}{10}}\ln\frac{5}{4}\left(\frac{u}{10}\right)'du=\ldots$

   $=\Pi_0\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{t}{10}}$

   Β) … $t=\frac{10}{\ln\frac{5}{4}}$ χρόνια

Aris Nikolaidis

2. Ένα κινητό κινείται πάνω σε άξονα συν/νων, έτσι ώστε η ταχύτητα κάθε χρονική στιγμή t να είναι $u(t)=\frac{1}{4}t^2-2\sqrt{t}$ σε cm/sec.

A) Να προσδιορίσετε τη θέση του κινητού τη χρονική στιγμή t=5 sec, αν κατά τη χρονική στιγμή t=0 sec η θέση του στον άξονα έχει συντεταγμένη 2 cm.

B) Να υπολογίσετε το διάστημα που διανύει από τη χρονική στιγμή t=0 sec μέχρι τη χρονική στιγμή t=5 sec.

Υπόδειξη :

A) Αν x(t) είναι η συνάρτηση θέσης του κινητού, τότε έχουμε:

$$x(5)=x(0)+\int_0^5\left(\frac{1}{4}t^2-2\sqrt{t}\right)dt=\ldots=2+\left[\frac{t^3}{12}-\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^5=\ldots=\frac{149-80\sqrt{5}}{12}cm$$

B) $S=\int_0^5\left|\frac{1}{4}t^2-2\sqrt{t}\right|dt$. Βρίσκουμε το πρόσημο της $u(t)=\frac{1}{4}t^2-2\sqrt{t}$ στο [0,5] … και τελικά S=$\frac{253-80\sqrt{5}}{12}cm\approx 6{,}17cm$

3. Ένα κινητό κινείται πάνω σε άξονα συν/νων, έτσι ώστε η ταχύτητα κάθε χρονική στιγμή t να είναι $U(t)=t^2-\ln t$, t>0 σε m/sec.

Να υπολογίσετε το διάστημα που διανύει το κινητό από τη χρονική στιγμή t=1 sec μέχρι τη χρονική στιγμή $t=\alpha\cdot e^2$, όπου α είναι το $\lim_{x\to 1}\left(\frac{4}{3x-3}\int_1^x \eta\mu\left(\frac{\pi t}{3}\right)dt\right)$.

Υπόδειξη:

Εύρεση του α: Επειδή η ημ^2(πχ/3) είναι συνεχής στο R, η συνάρτηση

$\int_1^x \eta\mu^2(\frac{\pi t}{3})dt$ είναι παραγωγίσιμη , άρα και συνεχής στο R. Έτσι,

$$\lim_{x\to 1}\int_1^x \eta\mu^2\left(\frac{\pi t}{3}\right)dt = \int_1^1 \eta\mu^2\left(\frac{\pi t}{3}\right)dt = 0$$ και άρα

α= $\lim_{x\to 1}\left(\frac{4}{3x-3}\int_1^x \eta\mu\left(\frac{\pi t}{3}\right)dt\right)$ = $\lim_{x\to 1}\frac{4\int_1^x \eta\mu^2\left(\frac{\pi t}{3}\right)dt}{3x-3}$ =…1

Για το διάστημα S έχουμε:

$$S = \int_1^{e^2} \left|t^2 - \ln t\right| dt = \ldots\ldots = \frac{e^6 - 3e^2 - 4}{3} m \cong 125{,}75m$$

(προηγούμενα πρέπει να βρούμε το πρόσημο της t^2-lnt στο $[1,e^2]$.

4. Α) Βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 9}\right), \ \mathrm{x} > 3$$

Β) Το εμβαδόν Ε ενός τριγώνου μεταβάλλεται ως προς το χρόνοt με ρυθμό $\sqrt{t^2 - 9}$, $\mathrm{t} > 3$ (σε m^2/sec) και τη χρονική στιγμή t=5 sec το εμβαδόν είναι 10-9ln3 m^2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν E(t) μια οποιαδήποτε χρονική στιγμή t.

Υπόδειξη :

$$f'(x) = \ldots = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}}$$

E(t)=E(5)+$\int_5^t E'(x)dx$ = E(5)+ $\int_5^t \sqrt{x^2 - 9}dx$, Όμως:

$$I = \int_5^t \sqrt{x^2-9}\,dx =$$

$$= \int_5^t \frac{x^2-9}{\sqrt{x^2-9}}\,dx = \int_5^t \frac{x^2}{\sqrt{x^2-9}}\,dx - 9\int_5^t \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}\,dx =$$

$$= \int_5^t x\left(\sqrt{x^2-9}\right)'dx - 9\int_5^t \left[\ln\left(x+\sqrt{x^2-9}\right)\right]'dx = \ldots$$

Τελικά $E(t) = \frac{1}{2}\left[t\sqrt{t^2-9} - 9\ln\left(t+\sqrt{t^2-9}\right)\right]$

5.